% % % **Určování drah – elementu**

Pokud známe elementy dráhy mužeme určit efemeridy. Kdyby nebyly žádné pozorovací chyby mohli bychom dostat jednoznačné řešení. Bylo navrženo mnoho metod. Nejlepší založena na analytických výpočtech.

Na silvestra roku 1800 italský astronom Piaci objevil planetku Ceres.

Když se ztratila ve svitu Slunce bylo ji pak velice těžké znovu najít. Selhala např. i Landova metoda.

Gauss zjistil dráhové elementy a z nich vypočetl efemeridy a v září 1801 byla planetka opět nalezena.

Na komety se zaměřil Heidrich Oberst.

Jelikož neznáme Keplerovy efemeridy musíme využít jiných 6 podmínek.

Například:

1. počáteční podmínky $\vec{r}, \dot{\vec{r}} \Rightarrow$ elementy
2. α_i, δ_i, t_i pro $i = 1, 2, 3 \Rightarrow$ elementy Gausova metoda – t_i jsou od sebe libovolně daleko
3. α_i, δ_i, t_i pro $i = 1, 2, 3 \Rightarrow \vec{r}, \dot{\vec{r}} \Rightarrow$ elementy t_i jsou si blízké

1. Laplaceova metoda

většinou u družic (komet)

z Dopplerova posunu určíme radiální rychlost

$\dot{\vec{r}}$ Doppleruv jev

$\vec{r}$ radiolokace, laserové lokace (u zemských satelitu je přesnost asi 1 cm)

Vždy vede k cíli.

známe $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$

předpoklad $\frac{m_a}{m_b} \to 0 \Rightarrow$ gravitační konstanta $k_1 \to k$ Gaussova grav. konstanta

vektor rychlosti

$$\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2 = v^2 = k^2 \left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a} \right)$$

podle integrálu živé síly

$r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$

jediná neznámá a; je-li $a \to \infty$, pak $g = a(1 - e)$

• projekce $\vec{\mathcal{L}}$;

$$\sqrt{p} \sin i \sin \Omega = \frac{1}{k}(y_0 \dot{z}_0 - \dot{y}_0 z_0),$$
$$\sqrt{p} \sin i \cos \Omega = \frac{1}{k}(x_0 \dot{z}_0 - \dot{x}_0 z_0),$$
$$\sqrt{p} \cos i = \frac{1}{k}(x_0 \dot{y}_0 - \dot{x}_0 y_0)$$

$p = a(1 - e^2), \quad r = \frac{p}{1 + e \cos v} \Rightarrow p, i, \Omega$

z parametru vyjde e – excentricita

Pro

$$r_0 \dot{r}_0 = x_0 \dot{x}_0 + y_0 \dot{y}_0 + z_0 \dot{z}_0 \dot{r}_0 = \frac{k}{\sqrt{p}} e \sin v_0,$$
$$r_0 = \frac{p}{1 + e \cos v_0} \to \text{ známe } r \text{ a } r_0 \text{ a mužeme vypočítat } v_0,$$
$$\operatorname{tg} \frac{E_0}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{v_0}{2} \Rightarrow E_0,$$
$$E_0 - e \sin E_0 = M_0 \Rightarrow \mathbf{M_0},$$
$$t - T = \frac{M_0}{n} \Rightarrow \mathbf{T}$$

Tím máme všechny elementy, až na argument perihelu

$$x = r[\cos(v+\omega)\cos\Omega - \sin(v+\omega)\sin\Omega\cos i]$$
$$y = r[\cos(v+\omega)\sin\Omega + \sin(v+\omega)\cos\Omega\cos i]$$
$$z = r[\sin(v+\omega)\sin i]$$

první rovnici rozšíříme $\cos\Omega$ a druhou $\sin\Omega$

$$r\cos\xi = x \text{z cosinové věty}$$
$$r\cos\eta = y$$
$$r\cos\zeta = z$$

ze třetí rovnice vyjde Ω

3. metoda

t_i, α_i, δ_i pro $i = 1,2,3$ a t_i jsou blízko sebe

– dráhy planet, komety pozorované ze Země

obrázek

$\vec{r}$ je heliocentrický pruvodič planetky

$\vec{\rho}$ je geocenrický pruvodič planetky (někdy se značí Δ)

$-\vec{R}$ je pravoúhlá souřadnice Slunce

$\vec{\rho} = -\vec{R} + \vec{r}$

dráha planetky

snažíme se odhadnout elementy pro t_2

$$\vec{s}_1 = s_2 - \tau_1\dot{\vec{s}}_2 + \frac{1}{2}\tau_1^2\ddot{\vec{s}}_2$$
$$\vec{s}_3 = s_2 - \tau_3\dot{\vec{s}}_2 + \frac{1}{2}\tau_3^2\ddot{\vec{s}}_2$$

Mohli bychom řadu rozvíjet dále, ale stačí první dva členy – aproximace

τ_1 je čas, který uplynul mezi t_2 a t_1

$$t_2 - t_1 = \tau_1 t_3 - t_2 = \tau_3$$
$$\dot{\vec{s}}_2 = \frac{\tau_3(\vec{s}_2 - \vec{s}_1)}{\tau_1(\tau_1+\tau_3)} + \frac{\tau_1(\vec{s}_3 - \vec{s}_2)}{\tau_3(\tau_1+\tau_3)}$$
$$\ddot{\vec{s}}_2 = \frac{2(\vec{s}_3 - \vec{s}_2)}{\tau_3(\tau_1+\tau_3)} - \frac{2(\vec{s}_2 - \vec{s}_1)}{\tau_1(\tau_1+\tau_3)}$$

$$\text{známe } \vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3, \vec{R}_i$$
$$\text{neznáme } \rho, \vec{r}_i$$
$$\dot{\vec{r}} = (\rho\vec{s})^{\cdot} + \dot{\vec{R}} = \dot{\rho}\vec{s} + \rho\dot{\vec{s}} + \dot{\vec{R}}$$
$$\ddot{\vec{r}} = (\rho\vec{s})^{\cdot\cdot} + \ddot{\vec{R}} = \ddot{\rho}\vec{s} + 2\dot{\rho}\dot{\vec{s}} + \rho\ddot{\vec{s}} + \ddot{\vec{R}}$$

zrychlení planetky; vyskytuje se též v pohybové rovnici planetky

$$\ddot{r} = -k^2\frac{\vec{r}}{r^3}\ddot{\vec{R}} = -k^2\left(1 + m_{\text{Země}}\right)\frac{\vec{R}}{R^3}$$

$$\text{dosadíme a dostaneme } \left(\ddot{\rho} + \frac{k^2\rho}{r^3}\right)\vec{s} + 2\dot{\rho}\dot{\vec{s}} + \rho\ddot{\vec{s}} = k^2\vec{R}\left(\frac{1+m}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right)$$

Chceme vypočítat heliocentrickou vzdálenost ρ

$$\rho = k^2\left(\frac{1+m}{R} - \frac{1}{r^3}\right)\frac{[\vec{s}, \dot{\vec{s}}, \dot{\vec{R}}]}{[\vec{s}, \dot{\vec{s}}, \ddot{\vec{s}}]}$$

Výraz ve hranatých závorkách je smíšený součin a dává objem tělesa, jehož strany tvoří právě dané úhly.

Na pravé straně neznáme r. Bude někde mezi Marsem a Jupiterem. Jako 0. aproximaci položíme $r = 2$ AU a ρ bude pouze velice přibližně.

Skalární vyjádření $r^2 = \rho^2 + R^2 + 2\rho(\vec{R} \cdot \vec{s}) - \cos\psi$

Mužeme zkusit iterovat až dosáhneme mezi posledními dvěma rovnicemi přibližný souhlas levých a pravých stran.

$$\rho = \rho(r), \quad r = r(\rho)$$

podobný postup se povede udělat i pro $\dot{\vec{\rho}}$

$$\dot{\rho} = \frac{k^2}{2}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1+m}{R^3}\right)\frac{[\vec{s}, \ddot{\vec{s}}, \dot{\vec{R}}]}{[\vec{s}, \dot{\vec{s}}, \ddot{\vec{s}}]}$$

pro čas $t_2 \rightarrow$ není-li index platí $i = 2$

Vypočetli jsme přibližně $\rho, \dot{\rho} \Rightarrow$ známe $\vec{\rho}, \dot{\vec{\rho}}$ a tedy $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ a elementy dráhy vyjdou jako v případě 1. (Laplaceova metoda)

V zásadě by měla mít vždy řešení. Toto řešení však není přesné:

- nepočítali jsme s nekonečně dlouhou řadou. Brali jsme v úvahu pouze členy do úrovně zrychlení.
- rovnice jsme uváděli do souladu zkusmo (iteracemi)
- do kinematických rovnic jsme přiřadili dynamické rovnice

2. Gaussova metoda

Tři pozorování mohou být od sebe libovolně vzdálena. Metoda má geometrický základ. Všechny 3 heliocentrické pruvodiče jsou komplanární (leží v jedné rovině). Z tohoto duvodu mužeme vyjádřit prostřední jako lineární kombinaci dvou zbývajících.

obrázek

znaménková konvence: $-\vec{R}, \vec{R}$

indexová konvence: $\tau = t_3 - t_1 \tau_1 = \dots$ % fixme

$$n_1\vec{r}_1 - \vec{r}_2 + n_3\vec{r}_3 = \vec{o}$$

Existují i jiné rozvoje

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau}\left(1 + \frac{4}{3}\frac{\tau^2 - \tau_1^2}{(r_1 + r_3)^3} + 4\frac{\tau_1^2\tau_3}{\tau}\frac{\tau_3 - \tau_1}{(r_1 + r_3)^4} + \cdots\right)$$
$$n_3 = \frac{\tau_3}{\tau}\left(1 + \frac{4}{3}\frac{\tau - \tau_3^2}{(r_1 + r_3)^3} + 4\frac{\tau_1\tau_3^2}{\tau}\frac{\tau_3 - \tau_1}{(r_1 + r_3)^4} + \cdots\right)$$

- opravné členy, které se snaží udělat z $\triangle$ sektor
- řekne se, že Oppolzerovy n jsou přesně sektoru rovny, i když víme, že je to spatně. Ale hodí se nám to k iterování. Používá se metoda nejmenších čtvercu. K dukazu rozvoje se využívá, že dráha je kuželosečka.

Určování vzdálenosti v prostředním bodě.

Lambertova – Eulerova věta

pro elipsu, plocha $\triangle$ pomocí excentrické a pravé anomálie

$$x = r\cos v = a\cos E - ae$$

$$y = r\sin v = a\sqrt{1-e^2}\sin E$$

rovnice sečteme a umocníme

$$r = a(1 - e\cos E)$$

$$r(1+\cos v) = a(1-e)(1+\cos E)$$
$$r(1-\cos v) = a(1+e)(1-\cos E)$$

z rovnic dostaneme

$$\sqrt{r}\cos\frac{v}{2} = \sqrt{a(1-e)}\cos\frac{E}{2}$$
$$\sqrt{r}\sin\frac{v}{2} = \sqrt{a(1+e)}\sin\frac{E}{2}$$

2 plochy v časech t, t' $\quad k(t'-t) \to \tau$

hledáme poměr

$$\eta = \frac{(rr')}{[rr']} \doteq \frac{k\sqrt{p}(t'-t)}{rr'\sin(v'-v)}$$

čitatel vyjde z 2. keplerova zákona a jmenovatel je plocha $\triangle$

$$\sqrt{r}\cos\frac{v}{2} = \sqrt{a(1-e)}\cos\frac{E}{2}$$
$$\sqrt{r}\sin\frac{v}{2} = \sqrt{a(1+e)}\sin\frac{E}{2}$$
$$E - e\sin E = a^{-3/2}k(t-T)$$

a totéž se udělá i pro čárkované

$$\eta, a, e, p, T, v, v', E, E'$$

Def.

$$v' - v = 2f$$
$$v + v' = 2F$$
$$E' - E = 2g$$
$$E' + E = 2G$$

$$\downarrow$$

$$\sqrt{rr'}\cos f = a\cos g - ae\cos G$$
$$\sqrt{rr'}\sin f = \sqrt{ap}\sin g$$
$$r + r' = 2a(1 - e\cos g\cos G)$$

odtud dostaneme $e\cos G$

$$\Rightarrow r + r' - 2\sqrt{rr'}\cos f\cos g = 2a\sin^2 g \qquad (A)$$

rozdíl pravých a excentrických anomálií. Poté se použije Keplerova rovnice a zbavíme se součtu.

g – rozdíl pravých anomálií

z Keplerovy rovnice (odečtením pro $t'-t$)

$$\frac{k(t'-t)}{a^{1.5}} = a^{-1.5}\tau = 2g - 2e\sin g\cos G$$

vyloučením $e\cos G$

$$\tau a^{-1.5} = 2g - \sin 2g + 2\sqrt{rr'}a^{-1}\sin g\cos f \qquad (B)$$

z rovnice $\sqrt{rr'}\sin f = \sqrt{ap}\sin g$ dosadíme do $\eta = \ldots E$

$$\eta = \frac{\tau}{2\sqrt{arr'}\cos f \sin g} \qquad (C)$$

takže máme k řešení A,B,C s neznámými η, a, g z (C) dosadíme za a do (A) a (B):

$$r + r' - 2\sqrt{rr'}\cos f\left(1 - 2\sin^2\frac{g}{2}\right) = \frac{\tau^2}{2\eta' rr'\cos^2 f}$$

$$\frac{8\eta^3\sqrt{(rr')^3}\cos^3 f\sin^3 g}{\tau^2} = 2g - \sin 2g + \frac{8\eta^2\sqrt{(rr')^3}\cos^3 f\sin^3 g}{\tau^2}$$

a definujeme

$$m = \frac{\tau^2}{(2\sqrt{rr'}\cos f)^3}, \quad l = \frac{r + r'}{4\sqrt{rr'}\cos f} - \frac{1}{2}$$

Pak

(D) $$\eta^2 = \frac{m}{l + \sin^2\frac{g}{2}}, \quad \eta^3 - \eta^2 = m\frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g}$$ (E)

Řeší se postupnými iteracemi (D) a (E); chceme najít η a druhá neznámá x. Mužeme začít s hodnotou $\eta = 1$, dosadíme do (D) $x = m/\eta^2$

l, m známe

Dosadíme toto x do E, musíme nějakým zpusobem spočítat $X(x)$. Numerické řešení $E \Rightarrow$ nové η a opět dosadíme do (D) a iterujeme.

Dostali jsme tedy η plochy sektoru známe z 2. Keplerova zákona. Získáme hodnoty n_1, n_3

Toto je jeden ze zpusobu metody jak získat čísla n_1, n_3. Druhým zpusobem jsou Oppolzerovy formule (resp. z jiných vzorcu u rozvoju do řad).

Ti, co se zabívali určováním drah:

Kepler, Halley, Newton, Hooke, d'Alambert, Laplace, Lagrange

Všichni však měli metody nevyhovující s velkýma chybama.

Gauss-Enke, Hansen, Gibs, Oppolzer, Banschinger, Keinkerfness, Dubjago 1930–50 , Sobolev 1940–60 , Banachiewit 1960 (počítačové metody)

MPC – major planet canter

další metoda, která se ale nepužívá L.– E. věta. Metody pro elisu, ale nechají se zjednodušit pro parabolu. Z toho plyne Eulerova věta pro parabolu a toto je základ pro Obbersovy metody (ta se už používá)

Vlastnosti výpočet fce $X(x)$

$$x = \sin^2\frac{g}{2}X(x) = \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g}$$

Hledáme $\frac{dX}{dg}$

$$1 - \cos 2g = \sin^2 g$$

$$\frac{dX}{dg} = \frac{4 - 3\cos g X(x)}{\sin g}$$

$$\frac{dX}{dx} : \frac{dX}{dx}\cdot\frac{dx}{dg}$$

$$\frac{4 - 3\cos g X(x)}{\sin g} = \frac{dX}{dx} 2\sin\frac{g}{2}\cos\frac{g}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\sin^2\frac{g}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos g)$$
$$\frac{dX}{dx} = \frac{8-6\cos g X(x)}{\sin^2 g} = \frac{8+6(2x-1)X}{1-1+4x-4x^2}$$
$$\sin^2\frac{g}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos g), \quad \cos g = -2x+1$$
$$\frac{dX}{dx} = \frac{4+(6x-3)X}{2x-2x^2}(F)$$

Předpokládáme, že $X(x)$ má rozvoj do mocninné řady

$$X(x) = \frac{4}{3}\left[\alpha x + (2\beta-\alpha)x^2 + (3\gamma-2\beta)x^3\right] = (8-4\alpha)x + (8\alpha-4\beta)x^2 + (8\beta-4\gamma)x^3 + \cdots$$

Tato rovnice má platit pro jakékoli $x \Rightarrow$ je splněno pouze tehdy, když koeficienty u všech mocnin x jsou nulové. Dostaneme spoustu rovnic o spoustě neznámých, znich vypočítáme, že $\alpha = \frac{6}{5}, \beta = \frac{8}{7}\alpha, \gamma\frac{10}{9}\beta$ atd.

$$X(x) = \frac{4}{3}\left(1 + \frac{6}{5}x + \frac{6\cdot 8}{5\cdot 7}x^2 + \frac{6\cdot 8\cdot 10}{5\cdot 7\cdot 9}x^3 + \cdots\right)$$

Lambertova – Eulerova věta II.

P. Anderle: Základy nebezské mechaniky

Academia, 1970, str. 100–103

Všechny tyto metody porovnávají dynamicky určené s geometricky určenou veličinou. V případě $\eta^2, \eta^3 - \eta^2$ plocha sektoru je dynamicky určena z 2. K. z. a plocha trojúhelníka geometricky.

U L.–E. věty se určuje tětiva a jednou dynamicky a podruhé geometricky

obr.

Výchází se z plochy sektoru.

$$S = \frac{1}{2}\int_{v_1}^{v_2} r^2 dv = \ldots E$$
$$\text{Def.: } \sin^2\frac{E}{2} = \frac{r_1+r_2+s}{4a}, \quad \sin^2\frac{\delta}{2} = \frac{r_1+r_2-5}{4a}$$
$$2S = \ldots = \sqrt{p}\left\{\frac{1}{6}\left[(r_1+r_2+5)^{\frac{3}{2}} \mp (r_1+r_2-5)^{\frac{3}{2}}\right] + \frac{1}{80}\cdot\frac{1}{a}\left[(r_1+r_2+5)^{\frac{5}{2}} \mp (r_1+r_2-5)^{\frac{5}{2}}\right] + \ldots\right\}$$

E.–L. Rozvoj

znaménková konvence: je úhel sektoru větší než 180° použijeme plus, je-li menší než 180° použijeme zneménko minus

Lambertova věta

$$ka^{-1.5}(t_2-t_1) = \mathcal{E} - \sin\mathcal{E} \mp (\delta - \sin\delta)$$

jedna neznámá je pouze délka tětivy S.

• řeší se metodou postupných aproximací. Řešení připomíná keplerovu rovnici. L.–E. rozvoj pro $a \to \infty$ tj. pro parabolu

$$6\tau = (r_1+r_2+s)^{\frac{3}{2}} \mp (r_1+r_2-s)^{\frac{3}{2}}$$

Eulerova věta

• používá se a nechá se odvodit i jinak než z E.–L. rozvoje

Eulerova věta – odvození z Barkerovy rovnice

$$\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{v_i}{2}+\operatorname{tg}\frac{v_i}{2}=\frac{k}{\sqrt{2}}\frac{t-T}{q^{1.5}}\qquad i=1,2$$

1. a 2. koncový vektor omezující prostor vektoru

$$\tau \stackrel{\text{def}}{=} k(t_2-t_1)\qquad \text{odečteme rovnice s } i=1 \text{ a } i=2$$

$$3(\operatorname{tg}\frac{v_2}{2}-\operatorname{tg}\frac{v_1}{2})+\operatorname{tg}^3\frac{v_2}{2}-\operatorname{tg}^3\frac{v_1}{2}=\frac{3\tau}{\sqrt{2}q^{1.5}} \tag{A}$$

$$r_i=q(1+\operatorname{tg}^2 v_i)$$

$$\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{r_1+r_2+s}{2}$$

$$\cos\frac{v_2-v_1}{2}=\pm\sqrt{\frac{\Sigma(\Sigma-s)}{r_1r_2}}\ \text{kosinová věta } v_2-v_1>180^\circ \text{ znaménko } -$$

$$\cos\frac{v_2-v_1}{2}=\frac{1+\operatorname{tg}\frac{v_1}{2}\operatorname{tg}\frac{v_2}{2}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{v_1}{2}}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{v_2}{2}}}=q\frac{1+\operatorname{tg}\frac{v_1}{2}\operatorname{tg}\frac{v_2}{2}}{\sqrt{r_1r_2}}$$

Trigonometrické vzorce

$$\sigma_1 \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{tg}\frac{v_1}{2}$$

$$\sigma_2 \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{tg}\frac{v_2}{2}$$

$$1+\sigma_1\sigma_2=\pm\frac{1}{q}\sqrt{\Sigma(\Sigma-s)}$$

A máme přípravu. Dosazujeme do (A):

$$\begin{aligned}3(\sigma_2-\sigma_1)+\sigma_2^3-\sigma_1^3&=(\sigma_2-\sigma_1)(3+\sigma_2^2+\sigma_1^2+\sigma_1\sigma_2)\\&=\sqrt{1+\sigma_1^2+1+\sigma_2^2-2(1+\sigma_1\sigma_2)}(1+\sigma_1^2+1\sigma_2^2+1+\sigma_1\sigma_2)\\&=\frac{3\tau}{\sqrt{2}q^{1.5}}\\&\Rightarrow\quad \Sigma^{1.5}\pm(\Sigma-s)^{1.5}=\frac{3\tau}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Dosadíme za Σ a dostaneme Eulerovu větu. Většinou t_2 je blízko t_1 a z toho plyne, že $s \ll r_1$ nebo r_2 numericky se toto špatně řeší a proto se počítá z upravené rovnice Eulerovy věty.

Mohlo by se r_1 a r_2 vytknou a závorka se rozvine do Taylorovy řady. Dostaneme nekonečnou řadu a tu převrátíme. $s =$ něco (nekonečná řada v τ)

$$6\tau=(r_1+r_2)^{1.5}\left[(1+x)^{1.5}-(1-x)^{1.5}\right]=(r_1+r_2)^{1.5}\left[3x-\frac{3}{4\cdot 6}x^3-3\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}x^5-\cdots\right]$$

$$\frac{3}{r_1+r_2}=x\qquad \text{dělíme } 3$$

$$\frac{2\tau}{(r_1+r_2)^{1.5}}=y=x-\frac{1}{4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}x^5-\cdots$$

tuto řadu obrátíme $x=y+a_3y^3+a_5y^5+\cdots$ a řadu integrujeme

$$\begin{aligned}y&=y+a_3y^3+a_5y^5+\cdots\\&\quad-\frac{1}{24}y^3-\frac{1}{8}a_3y^5+\cdots\\&\quad-\frac{1}{128}y^5+\cdots\end{aligned}$$

$$a_3 = \frac{1}{24}, \quad a_5 = \frac{5}{384}$$
$$x = y + \frac{1}{24}y^3 + \frac{5}{384}y^5 + \cdots$$

Lambertuv rozvoj

Olbersova metoda – v prostoru si představoval let komety, vymyslel ji jako geometrickou

6 údaju z pozorování α a δ ve 3 časech. Elementu dráhy máme jen 5. Mužeme si zvolit vlastní podmínku, která nám pomuže při řešení: předpokládáme lineární vztah mezi geocentrickými vzdálenostmi v první a poslední poloze.

1804 geocentrická metoda s puvodním označením; početní varianta P. Anderle.

dodatečná podmínka $\rho_2 = H\rho_1 + h$ (lineární vztah mezi 1. a 3. polohou, resp. ρ_1 a ρ_2)

$$n_1\vec{r}_1 - \vec{r} + n_2\vec{r}_2 = 0 \quad \vec{\rho} = \vec{R} + \vec{r}$$

$\hat{\rho}$ je jednotkový vektor k $\vec{\rho}$

$$n_1\hat{\rho}_1\rho - \hat{\rho}\rho + n_2\hat{\rho}_2\rho_2 = n_1\vec{R}_1 - \vec{R} + n_2\vec{R}_2 \tag{1}$$

Stejné jako u Gaoussovy metody. Dodatečná podmínka = volba vektoru $\vec{A} = (A, B, C)$ zatím $\vec{A}$ je libovolné, ale $\vec{A} \perp \vec{\rho}$ tj. $\vec{A}\hat{\rho} = 0$

Def.: $\vec{A}\hat{\rho}_i = \text{☄}_i \quad i = 1, 2, 3 \quad \vec{A}\vec{R}_i = \odot_i \quad i = 1, 2$ známe

Rovnice 1 se vynásobí skalárně $\vec{A}$:

$$\text{☄}_1 n_1\rho_1 + \text{☄}_2 n_2\rho_2 = \odot_1 n_1 - \odot + \odot_2 n_2 \tag{2}$$

Zajímáme se o vztah $\rho_2 = H\rho_1 + h$ z (2) plyne

$$H = -\frac{\text{☄}_1}{\text{☄}_2}\frac{n_1}{n_2}, \quad h = \frac{1}{\text{☄}_2}\left(\odot_1\frac{n_1}{n_2} - \odot\frac{1}{n_2} + \odot_2\right)$$

Vektor $\vec{A}$ je pól některé hlavní kružnice, kterou nazveme Olbersovou kružnicí.

Co znamená podmínka, že $\vec{A}\vec{\rho} = 0$? Olbersova kružnice prochází koncem $\hat{\rho}$

Výřez z nebeské (jednotkové) geocentrické sféry

obr.

L – geocentrické polohy Slunce

K – geocentrické polohy komet

$$\text{☄}_1 \sim \cos \overset{\frown}{AK}_1 = \sin \overset{\frown}{K_1Q}_1$$
$$\text{☄}_2 \sim \cos \overset{\frown}{AK}_2 = \sin \overset{\frown}{K_2Q}_2$$
$$\odot_1 \sim \sin \overset{\frown}{L_1M}_1 \cdot R_1$$
$$\odot \sim \sin \overset{\frown}{LM} \cdot R$$
$$\odot_2 \sim \sin \overset{\frown}{L_2M}_2 \cdot R_2$$

Bod A jsme mohli volit kdekoli na sféře. Volíme ho tak, aby ☄_1 a ☄_2 byly co největší. Což je ekvivalentní s tím, že h je malé. například, aby procházel střední polohou Slunce

pro Zemi je $h = 0$, $(N-1)/N_2$ poměr poloh trojúhelníku daných pruvodičem Země

$$h_{\text{od komety}} - h_{\text{od }\oplus} = \frac{\odot_1}{\text{☄}_2}\left(\frac{n_1}{n_2} - \frac{N_1}{N_2}\right)$$
$$\text{Pro Zemi: } \frac{N_1}{N_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2} + \frac{3}{4}\frac{\tau_1\tau}{\tau_2}\frac{\tau_2 - \tau_1}{(R_1 + R_2)^3}$$
$$\text{pro ☄: } \frac{n_1}{n_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2} + \frac{4}{3}\frac{\tau_1\tau}{\tau_2}\frac{\tau_2 - \tau_1}{(r_1 + r_2)^3}$$
$$h = \frac{4}{3}\frac{\tau_1\tau}{\tau_2}(\tau_2 - \tau_1)\left(\frac{1}{(r_1 + r_2)^3} - \frac{1}{(R_1 + R_2)^3}\right)\frac{\odot_1}{\text{☄}_2}$$

$\odot_1$ je zhruba stejně velké jako $\jupiter_2 \Rightarrow h$je dost malé, při $\tau_1 = \tau_2$ (ekvivalentní) $h = 0$

$\rho_2 = -\frac{\tau_1}{\tau_2}\frac{\jupiter_1}{\jupiter_2}\rho$ volíme

Při Olbersově metodě hledáme:

A,B,C (vektor $\vec{A}$), H, h; pak známe $\jupiter_i, \odot_i$

$\vec{\rho} = \rho\hat{\rho} = (X, \mu, \nu)\rho$ směrové kořeny, které známe

$$\vec{A}\hat{\rho} = 0 \quad A\lambda + B\mu + C\nu = 0$$
$$\vec{A}\vec{R} = 0 \quad AX + BY + CZ = 0$$

tyto 2 rovnice splní například tato volba:

$A = \mu Z - \lambda Y \quad B = \nu X - \lambda Z \quad C = \lambda Y - \mu X$

$H = H(\lambda, \mu, \nu, X, Y, Z) \quad h = h(\lambda, \mu, \nu, X, Y, Z)$

výpočet ρ_1 a ρ_2 pokračuje z rovnice (1)

$\rho_2 = H\rho_1 + h$

Eulerova věta

$\vec{\rho} = \vec{R} + \vec{r}$

Začneme např. s $\rho_1 = 1, \mathrm{AU}$ a iterujeme. S známe z Eukleidovy, ale mužeme zjistit z kosinové věty v trojúhelníku ρ_1, ρ_2, s