Stručné zápisky ze

Základů astronomie a astrofyziky I

Přednáší: doc. RNDr. Martin Šolc, CSc.
Sepsali: Michal Švanda

1 Problém dvou těles

Obrázek 1: Souřadnicový systém

Zvolme souřadnicový systém, dvě tělesa A a B, jejichž hmotnosti budou m_A a m_B a polohové vektory $\vec{r_A}$ a $\vec{r_B}$.Definujme vektor vzájemné polohy obou těles $\vec{r} = \vec{r_B} - \vec{r_A}$. Pak si napíšeme pohybové rovnice v inerciálním prostoru:

$$m_A \ddot{\vec{r_A}} = -G \frac{m_A m_B}{r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

$$m_B \ddot{\vec{r_B}} = G \frac{m_A m_B}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Vykrácením m_a nebo m_B v příslušné rovnici a odečtením těchto rovnic dostaneme:

$$\ddot{\vec{r_B}} - \ddot{\vec{r_A}} = \ddot{\vec{r}} = G \frac{m_A + m_B}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Toto je pohybová rovnice v relativních souřadnicích v neinerciálním prostoru.

Počítejme výraz $\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$.

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0$$

Výraz je roven nule proto, že první člen je vektorové násobení vektoru se sebou samým (a to je automaticky nula) a druhý člen je roven nule z téhož důvodu (neboť z pohybové rovnice víme, že $\ddot{\vec{r}}$ je úměrný $\vec{r}$).

Z toho vyplývá, že výraz $\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ bude roven konstantnímu vektoru, označme jej $\vec{C}$. Tím jsme dokázali, že *problém dvou těles se odehrává v rovině* a vektor $\vec{C}$ bude na tuto rovinu kolmý. Zaveďme tedy jiný systém souřadnic – místo kartézských x a y zavedeme polární r (vzdálenost mezi tělesy) a v (*pravá anomálie*). Platí převodní vztahy:

$$x = r \cos v, \ y = r \sin v.$$

Do těchto souřadnic převedeme vztah $\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{C}$.

$$\dot{x} = \dot{r}\cos v - r\sin v\dot{v},\ \ \dot{y} = \dot{r}\sin v + r\cos v\dot{v}$$

$$r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix},\ \dot{r} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x\dot{y} - \dot{x}y \end{pmatrix}$$

$$x\dot{y} - \dot{x}y = x(\dot{r}\sin v + r\cos v\dot{v}) - y(\dot{r}\cos v - r\sin v\dot{v}) =$$

$$= r\dot{r}\cos v\sin v + r^2\cos^2 v\dot{v} - r\dot{r}\cos v\sin v + r^2\sin^2 v\dot{v} = \mathbf{r^2\dot{v}} = \mathbf{C}$$

A to je jedna z formulací **2. Keplerova zákona**.

Druhý Keplerův zákon – *plošná rychlost pohybu tělesa po kuželosečce je konstantní.* Označíme-li plošnou rychlost jako w a zavedeme ji vztahem $w = \frac{1}{2}r^2\,dv$, je vztah mezi plošnou rychlostí a zavedenou konstantou $C = 2w$.

Pro eliptickou dráhu zavádíme bod nejbližší centrálnímu tělesu (např. Slunci) – *pericentrum* Π (např. perihelium, perigeum, periastr) a bod centrálnímu tělesu nejvzdálenější – *apocentrum* **A** (např. afelium, apogeum, apastr).

Moment hybnosti

Moment hybnosti vyjadřujeme vůči těžišti systému v těžišťové inerciální soustavě.

$$\vec{L} = \vec{r_B} \times m_B\dot{\vec{r_B}} + \vec{r_A} \times m_A\dot{\vec{r_A}}$$

Vektory $\vec{r_A}$ a $\vec{r_B}$ jsou tentokráte polohové vektory jednotlivých hmotných bodů vůči těžišti. Oba vektory směřují od těžiště k příslušnému bodu. V důsledku toho je vztah mezi nimi a vektorem $\vec{r}$, který jsme zaváděli jako polohový vektor tělesa A vůči tělesu B

$$\vec{r_B} - \vec{r_A} = \vec{r}$$

V těžišťové soustavě platí zákon zachování momentu sil ve tvaru:

$$m_A\vec{r_A} = -m_B\vec{r_B}.$$

Z toho vypočítáme:

$$\vec{r_A} = \frac{m_B}{m_A + m_B}\vec{r},\ \vec{r_B} = -\frac{m_A}{m_A + m_B}\vec{r}.$$

Označíme-li $M = m_A + m_B$, můžeme moment hybnosti počítat:

$$\vec{L} = -\frac{m_A}{M} m_B \vec{r} \times (-\frac{m_A}{M})\dot{\vec{r}} + \left(\frac{m_B}{M}\right)^2 m_A \vec{r} \times \dot{\vec{r}} =$$
$$= \frac{m_A m_B}{M^2} \vec{r} \times \dot{\vec{r}}(m_A + m_B) = \frac{m_A m_B}{M} \vec{r} \times \dot{\vec{r}},$$

$m_A m_B/(m_A + m_B) = \mu$ je redukovaná hmotnost, $\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{C}$, jak již víme z důkazu, že oběh probíhá v rovině. Tedy

$$\vec{L} = \mu \vec{C} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C \end{pmatrix}.$$

Poslední rovnost platí v kartézské soustavě souřadnic (x, y, z), kde rovina dráhy je xy a počátek soustavy souřadné je v tělese B. Obecně je ale referenční rovina jiná, než je rovina dráhy. Tato rovina se s referenční rovinou (např. ekliptikou) protíná v *uzlové přímce*. Odchylku obou rovin označíme i a budeme jí říkat *sklon dráhy*, natočení roviny vůči souřadné ose popisuje úhel Ω – *délka výstupného uzlu*. Moment hybnosti pak bude mít jiný rozklad na složky:

$$L_x = L \sin\Omega \sin i,\ L_y = -L\cos\Omega \sin i,\ L_z = L\cos i.$$

Hledání pohybových rovnic se souřadnicemi r a v

Vyjdeme z langranžiánu soustavy:

$$\mathsf{L} = T - U = \frac{1}{2} m_A \dot{\vec{r}_A}^2 + \frac{1}{2} m_B \dot{\vec{r}_B}^2 + G\frac{m_A m_B}{r} =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{m_A m_B}{(m_A + m_B)^2}\dot{\vec{r}}^2 (m_B + m_A) + G\frac{m_A m_B}{r} =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}\dot{\vec{r}}^2 + G\frac{m_A m_B}{r}.$$

Protože

$$\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} \dot{r}\cos v - r\sin v\dot{v} \\ \dot{r}\sin v + r\cos v\dot{v} \\ 0 \end{pmatrix}$$

a

$$\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{v}^2$$

je

$$\mathsf{L} = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{v}^2) + G\frac{m_A m_B}{r}.$$

A teď již jen řešíme Lagrangeovy rovnice 2. druhu:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathsf{L}}{\partial q} = 0.$$

Dosadíme-li za q souřadnici r, dostaneme:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mu 2\dot{r}\right) - \frac{1}{2}\mu\dot{v}^2 2r + \frac{Gm_A m_B}{r^2} = 0$$

Po dalších úpravách pak:

$$\ddot{r} - r\dot{v}^2 = -G\frac{m_A + m_B}{r^2}$$

a to je **pohybová rovnice**. Souřadnice v je cyklická (L na ní explicitně nezávisí) a tudíž:

$$\frac{d}{dt}(\mu r^2\dot{v}) = 0 \;\Rightarrow\; r^2\dot{v} = \frac{konst}{\mu} = C.$$

Dostali jsme opět druhý Keplerův zákon a víme, že $konst = L$ (L je moment hybnosti).

Z pohybové rovnice hledáme tvar dráhy. Zavedeme substituci $u = 1/r$. Tečkou budeme dále značit derivaci podle t, čárkou derivaci podle v, tedy: $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ a $r' = \frac{dr}{dv}$.

Druhý Keplerův zákon dostane jiný tvar: $r^2\dot{v} = C \Rightarrow \dot{v} = Cu^2$.

$$\dot{r} = \frac{dr}{dv}\frac{dv}{dt} = \frac{d(\frac{1}{u})}{dv}\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{u^2}\dot{v}u' = -Cu',$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dv}\frac{dv}{dt} = -Cu''\dot{v} = -C^2u^2u''.$$

Pohybová rovnice pak nabyde tvaru:

$$C^2u'' + C^2u = G(m_A + m_B) \;\Rightarrow\; \mathbf{u'' + u = \frac{G}{C^2}(m_A + m_B)}.$$

Poslední tvar pohybové rovnice se nazývá *Binetova rovnice*. Jejím řešením jsou harmonické funkce, tedy například $u = k_1\cos v + k_2\sin v + \frac{G(m_A+m_B)}{C^2}$ nebo $u = \frac{G(m_A+m_B)}{C^2} + k\cos(v-\omega)$. k a ω jsou integrační konstanty.

Pak

$$r = \frac{1}{u} = \frac{1}{\frac{G(m_A+m_B)}{C^2} + k\cos(v-\omega)} = \frac{\frac{C^2}{G(m_A+m_B)}}{1 + \frac{KC^2}{G(m_A+m_B)}\cos(v-\omega)} =$$

$$= \frac{p}{1 + e\cos(v - \omega)}.$$

Poslední rovnice je rovnice kuželosečky v polárním tvaru a dostali jsme **1. Keplerův zákon**.

První Keplerův zákon *říká, že planety obíhají po elipsách (blízkých kružnicím), v jejichž společném ohnisku je Slunce.*

Z podobnosti parametrů geometrických a dynamických získáme vztahy pro numerickou excentricitu e a parametr p.

$$e = \frac{KC^2}{G(m_A + m_B)},\ p = \frac{C^2}{G(m_A + m_B)}$$

Kuželosečky lze definovat pomocí řídící přímky, ohniska a excentricity. Máme-li bod F ohnisko, bod X na kuželosečce a bod P kolmý průmět bodu X do řídící přímky, platí: $\frac{|FX|}{|PX|} = e$ a $\frac{r}{D - \cos v} = e$, kde D je vzdálenost ohniska od řídící přímky.

Pak také $\frac{p}{D} = e$, $r = \frac{eD}{1+e\cos v} = \frac{p}{1+e\cos v}$ a $p = a(1 - e^2)$, kde a je velká poloosa dráhy tělesa (někdy – a v případě paraboly zcela nutně – se místo velké poloosy používá parametr q – vzdálenost v pericentru)..

Vlastnosti kuželoseček srhnuje následující tabulka:

Kuželosečka	**e**	**p, a**
kružnice	$e = 0$	$r = a$
elipsa	$e \in (0, 1)$	$p > 0$, $a > 0$
parabola	$e = 1$	$p = 2q$, $a \to \infty$
hyperbola	$e > 1$	$p > 0$, $a < 0$

Tabulka 1: Vlastnosti kuželoseček.

Za určitých okolností mohou kuželosečky degenerovat. Jde o limitní případy.

1. excentricita elipsy se blíží zezdola jedné, z elipsy se stává úsečka
2. zavíráme parabolu nebo hyperbolu a dostáváme polopřímku

Pohyb po elipse

Víme, že plošná rychlost $w = konst$ a tu lze vypočíst z plochy elipsy a periody oběhu P jako $w = konst = \frac{\pi ab}{P}$, kde a je velká a b malá poloosa elipsy. Dále počítejme za využití geometrického faktu, že malou poloosu lze vypočíst z velké poloosy a excentricity ($b = a\sqrt{1-e^2}$) a že konstanta C souvisí s parametrem elipsy p podle vztahu $p = a(1-e^2) = \frac{C^2}{G(m_A+m_B)}$ dostaneme:

$$w = \frac{\pi a^2}{P}\sqrt{1-e^2} = \frac{C}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{a(1-e^2)G(m_A+m_B)}.$$

Umocněním a dalšími úpravami dostáváme:

$$\frac{\pi^2 a^4}{P^2}(1-e^2) = \frac{1}{2}a(1-e^2)G(m_A+m_B),$$

$$\mathbf{\frac{a^3}{P^2} = \frac{G(m_A+m_B)}{4\pi^2}}.$$

Poslední výraz je formulace **3. Keplerova zákona**.

Třetí Keplerův zákon *říká, že poměr třetí mocniny velké poloosy dráhy planety a druhé mocniny její oběžné periody je konstantní. Vyjádříme-li velkou poloosu v astronomických jednotkách a periodu v rocích, dostaneme číslo přibližně rovné jedné.*

Zachování mechanické energie

Mechanická energie je součtem energie kinetické a potenciální.

$$E(r,v) = \frac{1}{2}m_A\dot{\vec{r_A}}^2 + \frac{1}{2}m_B\dot{\vec{r_B}}^2 - \frac{Gm_Am_B}{r} = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{v}^2) - \frac{Gm_Am_B}{r}$$

Dokažme, že tato energie se v čase nemění.

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\mu 2\dot{r}\ddot{r} + \frac{1}{2}\mu 2r\dot{r}\dot{v}^2 + \frac{1}{2}\mu 2v^2\dot{v}\ddot{v} + \frac{Gm_Am_B}{r^2}\dot{r} =$$

$$= \mu\dot{r}\underbrace{(\ddot{r} - r\dot{v}^2 + G\frac{m_A+m_B}{r})}_{0} + \mu\dot{v}\underbrace{(r^2\ddot{v} + 2r\dot{r}\dot{v})}_{0} = 0$$

První člen je roven nule, protože se jedná o pohybovou rovnici, nulovost druhého členu odvodíme pomocí druhého Keplerova zákona:

$$r^2\ddot{v} + 2r\dot{r}\dot{v} = \frac{d}{dt}(r^2\dot{v}) = \frac{d}{dt}C = 0.$$

Pro elipsu pak nejprve sledujme platnost druhého Keplerova zákona v perihelu:

$$w = \frac{a(1-e)v_\pi}{2},\ C = a(1-e)v_\pi,\ a(1-e^2) = \frac{a^2(1-e)^2v_\pi 2}{G(m_A+m_B)},$$

$$\frac{1+e}{1-e} = \frac{a{v_\pi}^2}{G(m_A+m_B)}, \quad \frac{1}{2}{v_\pi}^2 = \frac{1}{2a}\frac{1+e}{1-e}G(m_a+m_B).$$

Potenciální energie v perihelu je dána vztahem: $V = -G\frac{m_A m_B}{a(1-e)}$. Tyto vztahy platí obecně pro každý bod dráhy, tudíž velikost rychlosti v perihelu v_π můžeme nahradit obecnou rychlostí v. Pak celkovou mechanickou energii můžeme napsat jako:

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 - \mu G\frac{m_A+m_B}{r}.$$

Zkoumejme veličinu h, která se v astronomii používala dříve než energie a nazývá se *živá síla (vis vita)*. Energii lze na živou sílu přepočítat jednoduše podle vztahu: $h = E/\mu$.

$$h = \frac{1}{2a}\frac{1+e}{1-e}G(m_A+m_B) - \frac{G(m_A+m_B)}{a(1-e)} = \ \dots\ = -G\frac{m_A+m_B}{2a}$$

Dosadíme-li do vzorce pro výpočet celkové mechanické energie, dostaneme:

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{G(m_A+m_B)}{r} - \frac{G(m_A+m_B)}{2a} = G(m_A+m_B)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2a}\right),$$

$$\mathbf{v^2 = G(m_A+m_B)\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)}.$$

Tento vzorec zcela obecně dává možnost určit velikost rychlosti tělesa kdekoli podél jeho trajektorie a nazývá se **zákon zachování živé síly**.

Keplerova úloha

Všimli jsme si, že řešení pohybové rovnice, které jsme nalezli, je ve tvaru $r = r(v)$. $r = r(t)$ a $v = v(t)$ analyticky vyjádřit nelze.

Keplerovou úlohou rozumíme nalezení způsobu výpočtu $r = r(t)$ a $v = v(t)$.

Představme si obrázek. Trajektorií tělesa v rovině je elipsa, v jejímž jednom ohnisku S je Slunce. Pravou anomálii v budeme odečítat od směru velké osy, který vede k perihelu Π. Elipse opíšeme kružnici (bude mít tedy poloměr právě a) a nazveme ji *Keplerovou kružnicí*. Planeta se bude nacházet v bodě P na elipse a průmětem, kolmým na hlavní osu elipsy, vznikne její obraz na Keplerově kružnici Q. Pata průmětové přímky ponese označení N. Úhel, jehož vrchol bude ve středu Keplerovy kružnice a jedno jeho rameno bude

Obrázek 2: Odvození Keplerovy rovnice.

tvořit hlavní osa elipsy ve směru k perihelu, druhé pak polopřímka procházející bodem Q, budeme označovat E a budeme mu říkat *excentrická anomálie.* Potřebujeme ještě jeden údaj, který nám celou situaci popíše v čase. Zvolme tedy T časový okamžik, kdy se planeta nacházela v perihelu. O bude střed Keplerovy kružnice.

Z geometrie plyne, že $\frac{|PN|}{|QN|} = \frac{b}{a}$. Pak počítejme plochy některých vybraných obrazců v čase t. Oběžná perioda planety bude P_o.

Plocha sektoru $S\Pi P = w(t-T) = \frac{\pi ab}{P_o}(t-T)$.

Plocha sektoru $S\Pi Q = \frac{a}{b}\frac{\pi ab}{P_o}(t-T) = \frac{\pi a^2}{P_o}(t-T)$.

Plocha trojúhelníku $OSQ = \frac{1}{2}aea\sin E$.

Plocha kruhové výseče $O\Pi Q = \pi a^2\frac{E}{2\pi}$. Tu lze ale také složit z plochy trojúhelníku OSQ a sektoru $S\Pi Q$. Získáváme rovnici:

$$\pi a^2\frac{E}{2\pi} = \frac{1}{2}a^2 e\sin E + \frac{\pi a^2}{P_o}(t-T),$$

$$\mathbf{E} - \mathbf{e}\sin\mathbf{E} = \frac{\mathbf{2}\pi}{\mathbf{P_o}}(\mathbf{t}-\mathbf{T}) = \mathbf{n}(\mathbf{t}-\mathbf{T}) = \mathbf{M}.$$

Této rovnici se říká **Keplerova rovnice**. Veličina M se nazývá *střední anomálií* a n *středním denním pohybem.*

Algoritmus výpočtu Keplerovy úlohy

1. Vypočítáme střední anomálii $M = \frac{2\pi}{P_o}(t-T)$.

2. Vyřešíme Keplerovu rovnici a získáme tak excentrickou anomálii E.

3. Vypočítáme $v = v(t)$ pomocí E.

4. Vypočítáme $r = \frac{p}{1+e\cos v(t)}$.

Z tohoto algoritmu zatím nemáme dopočítán bod 3. Vyjděme z geometrických úvah o polohovém vektoru bodu:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos v \\ r\sin v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos E - ae \\ a\sin E\,\frac{b}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(\cos E - e) \\ a\sqrt{1-e^2}\sin E \end{pmatrix}.$$

Dále použijme součtové vzorce:

$$\cos^2\frac{E}{2} = \frac{1+\cos E}{2}, \ \sin^2\frac{E}{2} = \frac{1-\cos E}{2}.$$

Z geometrie:

$$r\cos v = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}\cos v = a(\cos E - e).$$

Pak počítejme výrazy $1+\cos E$ a $1-\cos E$.

$$1+\cos E = \frac{1+e\cos v+\cos v-e^2\cos v+e+e^2\cos v}{1+e\cos v} = \frac{(1+e)(1+\cos v)}{1+e\cos v}$$

$$1-\cos E = \frac{1+e\cos v-\cos v+e^2\cos v-e-e^2\cos v}{1+e\cos v} = \frac{(1-e)(1-\cos v)}{1+e\cos v}$$

Jestliže oba výrazy podělíme, dostaneme:

$$\tan^2\frac{E}{2} = \frac{(1-e)(1-cosv)}{(1+e)(1+\cos v)} = \frac{1-e}{1+e}\tan^2\frac{v}{2}.$$

V kartézských souřadnicích se algoritmus mírně modifikuje:

3. $x = x(E)$, $x = a(\cos E - e)$,
4. $y = y(R)$, $y = a\sqrt{1-e^2}\sin E$.

Pak:

$$r^2 = x^2+y^2 = (a\cos E - ae)^2 + a^2(1-e^2)\sin^2 E = \ \ldots \ = a^2(1-e\cos E)^2$$

a tedy $r = a(1-e\cos E)$.

Keplerova rovnice diferenciálně

Víme, že platí:

$$\vec{C}_z = C = |\vec{r}\times\dot{\vec{r}}|_z = -(\dot{x}y - x\dot{y}),$$

$$\begin{aligned} x &= a(\cos E - e), & \dot{x} &= -a\sin E\dot{E}, \\ y &= a\sqrt{1-e^2}\sin E, & \dot{y} &= a\sqrt{1-e^2}\cos E\dot{E}. \end{aligned}$$

Pak

$$C = -(-a^2\sqrt{1-e^2}\sin^2 E\dot{E} - a^2\sqrt{1-e^2}\cos^2 E\dot{E} + a^2 e\sqrt{1e^2}\cos E\dot{E}.$$

Po několika dalších úpravách dospějeme k diferenciální rovnici:

$$\dot{E}(1 - e\cos E) = \frac{C}{a^2\sqrt{1-e^2}}.$$

Tu vyřešíme separací proměnných, integrujeme z perihelu do bodu P.

$$\int_0^E (1 - e\cos E)dE = \int_T^t \frac{C}{a^2\sqrt{1-e^2}}dt$$

Použijeme-li dříve odvozeného vztahu, že $C^2 = G(m_A + m_B)a(1-e^2)$, dostaneme rovnici ve tvaru:

$$E - e\sin E = \sqrt{\frac{G(m_A + m_B)}{a^3}}(t-T) = M = n(t-T).$$

Toto je *Keplerova rovnice* odvozená diferenciálně. Z ní lze již známým způsobem vypočítat třetí Keplerův zákon.

Vsuvka o měření gravitačních konstant

Při počítání je důležitá správná volba jednotek. Střední denní pohyb se vypočítá podle vztahu: $n = \sqrt{\frac{G(m_A+m_B)}{a^3}}$, přičemž jednotky jsou v SI. Jestliže se ale pohybujeme ve Sluneční soustavě, je centrálním tělesem (a tedy tělesem B) Slunce. Zvolme hmotnost Slunce za jednotku, pak $m_B = M_\odot = 1$. Potom bude mít vztah pro střední denní pohyb tvar $n = \sqrt{\frac{G(1+m)}{a^3}}$, přičemž hmotnost druhého tělesa (planety) m bude uvedena v hmotnostech Slunce.

Aby se nám lépe počítalo, je vhodné přejít od klasické gravitační konstanty Newtonovy G k nové konstatně k, kterou nazveme *Gaussovou gravitační konstantou.* Platí převodní vztah: $G = k^2$.

Pojďme se podívat, čemu je Gaussova gravitační konstanta rovna. Zaveďme si ale několik předpokladů:

- jednotkou délky zvolme astronomickou jednotku (střední vzdálenost Země-Slunce),

- jednotkou času zvolme střední sluneční den (dále si povíme, kolik to skutečně je),

- jednotkou hmotnosti zvolme jednu hmotnost sluneční.

Pak je hodnota Gaussovy gravitační konstanty rovna $\mathbf{k = 3548.2}$". Přibližné hodnoty dalších potřebných konstant jsou: $M_\odot = 1.99 \times 10^{30}$ kg, $m_Z = 1/330\,000\ M_\odot$.

V jiných jednotkách je hodnota Gaussovy gravitační konstanty

$$k = 0.017\,202\,098\,95\ \frac{AU^{1.5}}{str.den \cdot \sqrt{M_\odot}}.$$

Gauss při svém výpočtu použil hodnotu středního slunečního dne ze siderického roku, který má 365.256 383 5 takových dní a poměr hmotnosti Země ku hmotnosti Slunce $m_\oplus/M_\odot = 1/354\,710$.

Mezinárodní astronomická unie (IAU) na svém zasedání v roce 1976 stanovila hlasováním moderní hodnotu tohoto poměru $m_\oplus/M_\odot = 1/332\,946$, v důsledku čehož by se musela hodnota Gaussovy gravitační konstanty změnit.

Protože však již bylo s touto hodnotou učiněno mnoho výpočtů, bylo rozhodnuto, že hodnota Gaussovy gravitační konstanty se zachová, ale změní se velikost velké poloosy zemské dráhy, která má podle usnesení z téhož roku hodnotu $a_\oplus = 1.000\,000\,02$ AU.

V soustavě SI má Gaussova gravitační konstanta hodnotu, jež přímo vychází z hodnoty gravitační konstanty Newtonovy.

$$G = (6\,675 \pm 1) \times 10^{-14}\ \frac{m^3}{kg \cdot s^2} = k^2$$

V astronomii se ale neměří taková konstanta, v astronomii měříme konstantu gravitační v součinu s hmotnostmi jednotlivých těles, jichž se problém týká. Vzniká pak *centrická gravitační konstanta* k_1, jejíž hodnota je závislá na tělese, u něhož měření provádíme.

$$G(M_\odot + m) = k_1^2$$

Pro gravitační konstanty platí několikero poučení:

- centrické gravitační konstanty se měří z oběžné periody a velké poloosy oběžné dráhy,

- hodnotu centrické gravitační konstanty lze změřit s větší přesností, než hodnoty veličin, z nichž se tato konstanta vypočítá (součin nepřesných čísel dá přesnější číslo),

- historicky se ponechala hodnota Gaussovy gravitační konstanty, což vedlo ke změně velké poloosy oběhu Země,

- hodnoty konstant se neurčují měřením, ale hlasováním.

gravitační konstanta	**hodnota v SI**
heliocentrická	$13\,271\,244,0 \times 10^{13}$ m^{3}s^{-2}
geocentrická	$398\,600,5 \times 10^{9}$ m^{3}s^{-2}
selenocentrická	$4\,902,8 \times 10^{9}$ m^{3}s^{-2}
areocentrická	$42\,828,4 \times 10^{9}$ m^{3}s^{-2}
afroditocentrická	$324\,858,8 \times 10^{9}$ m^{3}s^{-2}

Tabulka 2: Centrické gravitační konstanty.

Pohyb po parabole

Pro parabolu platí také rovnice kuželosečky v polárním tvaru, ale můžeme ji modifikovat do další podoby. Víme, že excentricita e je rovna jedné. Zavedeme veličinu q *vzdálenost v perihelu*, což je vzdálenost mezi ohniskem paraboly a jejím vrcholem a její hodnota je poloviční, než hodnota parametru (vzdálenost ohniska od řídící přímky). Pak platí:

$$r = \frac{r}{1 + e\cos v} = \frac{2q}{2\cos^2\frac{v}{2}} = q\frac{\sin^2\frac{v}{2} + \cos^2\frac{v}{2}}{\cos^2\frac{v}{2}} = q = (1 + \tan^2\frac{v}{2})$$

Budeme stejně jako v případě odvozování Keplerovy rovnice integrovat 2. Keplerův zákon od perihelu do bodu P, kde bude v čase t.

$$C = r^2\dot{v} = r^2\frac{dv}{dt} \;\Rightarrow\; r^2\,dv = C\,dt$$

$$\int\limits_0^v r^2\,dv = \int\limits_T^t c\,dt$$

Pro výpočet integrálu napíšeme průvodič r jednou pomocí funkce *cos* a jednou pomocí funkce *tan*.

$$\int\limits_0^v q(1 + \tan^2\frac{v}{2})\frac{q}{\cos^2\frac{v}{2}}\,dv = \int\limits_T^t c\,dt$$

Použijeme-li substituce $x = \tan\frac{v}{2}$, pak $dx = \frac{1}{\cos^2\frac{v}{2}}\frac{dv}{2}$ a intergrál se snadno dopočítá.

$$\int\limits_{v=0}^{v=v} 2q^2(1 + x^2)\,dx = C\int\limits_T^t dt,$$

$$2q^2\left[x + \frac{x^3}{3}\right]_{v=0}^{v=v} = C(t - T),$$

$$\frac{1}{3}\tan^3\frac{v}{2}+\tan\frac{v}{2}=\frac{C}{2q^2}(t-T)=\frac{\sqrt{G(m_A+m_B)2q}}{2q^2}(t-T)=k_1q^{-\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{2}}{2}(t-T).$$

Docházíme ke konečné formuli

$$\mathbf{\frac{1}{3}\tan^3\frac{v}{2}+\tan\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{G(m_A+m_B)}{2q^3}}(t-T)},$$

která se nazývá **Barkerova rovnice**.

Ukažme si, že Barkerova rovnice je limitním případem rovnice Keplerovy. Uděláme tedy limitu pro poloosu jdoucí k nekonečnu a excentricitu blížící se jedné.

V Keplerově rovnici $E-e\sin E=M=n(t-T)=\sqrt{G(m_A+m_B)}a^{-\frac{3}{2}}(t-T)$ nahradíme velkou poloosu a pomocí vzdálenosti v perihelu $q=a(1-e)$. Budeme provádět postupné úpravy Keplerovy rovnice.

$$\frac{E-e\sin E}{\sqrt{(1-e)^3}}=\frac{\sqrt{(1-e)^3}\sin E+E-\sin E}{\sqrt{(1-e)^3}}=\frac{2\sin\frac{E}{2}\cos\frac{E}{2}}{\sqrt{1-e}}+$$

$$\frac{E-\sin E}{\sin^2\frac{E}{2}}\frac{\sin^2\frac{E}{2}}{\sqrt{(1-e)^3}}=\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}\sin\frac{E}{2}}{\sqrt{1-e}}\cos\frac{E}{2}+\frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\frac{E-\sin E}{4\sin^3\frac{E}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}\sin\frac{E}{2}}{\sqrt{1-e}}\right)^3$$

Počítejme limitu tohoto výrazu pro $e\to 1$ jako limitu součtu. Předpokládejme, že jednotlivé členy mají limitu a tudíž i celkový výraz má limitu. Současně převeďme excentrickou anomálii E na pravou anomálii v.

$$\tan\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2}$$

Počítejme limitu pro $e\to 1$ výrazu: $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-e}}\sin\frac{E}{2}$.

$$\lim_{e\to 1}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-e}}\sin\frac{E}{2}=\lim_{e\to 1}\sqrt{\frac{2}{1-e}}\frac{\tan\frac{E}{2}}{\sqrt{1-\tan^2\frac{E}{2}}}=$$

$$\lim_{e\to 1}\sqrt{\frac{2}{1-e}}\frac{\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{v}{2}}{\sqrt{1-\frac{1-e}{1+e}\tan\frac{v}{2}}}=\lim_{e\to 1}\sqrt{\frac{2}{1+e}}\tan\frac{v}{2}=2\tan\frac{v}{2}$$

Pro konečný výpočet uvažujme následující: výraz $\tan\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2}$ má konečnou hodnotu. Přitom odmocnina je typu $\frac{1}{0}$ pro $e\to 1$ se blíží nekonečnu. Tudíž hodnota $\tan\frac{E}{2}$ musí být nulová, z čehož plyne, že i $E\to 0$.

Počítejme limitu dalšího výrazu pro $E \to 0$, který se vyskytuje v naší rovnici $\frac{E-\sin E}{4\sin^3\frac{E}{2}}$. To je limita typu $\frac{0}{0}$, proto ji počítejme L'Hospitallovým pravidlem.

$$\lim_{E\to 0}\frac{E-\sin E}{4\sin^3\frac{E}{2}} = \lim_{E\to 0}\frac{1-\cos E}{\frac{12}{2}\sin^2\frac{E}{2}\cos\frac{E}{2}} = \lim_{E\to 0}\frac{1}{3}\frac{1}{\cos\frac{E}{2}} = \frac{1}{3}$$

Jestliže tyto dílčí limity spojíme, dostaneme celkovou rovnici:

$$\sqrt{2}\tan\frac{v}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{4}{3}\tan^3\frac{v}{2} = k_1 q^{-1.5}(t-T),$$

která po dalších úpravách již má hledaný tvar Barkerovy rovnice.

Pohyb po hyperbole

Pro hyperbolu platí prakticky Keplerova rovnice, jen je zapotřebí ji mírně modifikovat.

Rovnice hyperboly ve středových souřadnicích má tvar $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Malá poloosa b se vypočítá pomocí vztahu $b = a\sqrt{1-e^2}$. Protože je ale $e > 1$, je hodnota malé poloosy imaginární. Platí převodní vztahy mezi kartézskými středovými souřadnicemi a velkou a malou polooosou a excentrickou anomálií:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos E \\ b\sin E \end{pmatrix}$$

Hodnoty na pravé straně rovnosti jsou reálné, hodnota velké poloosy a je také reálná, ale hodnota malé poloosy b je imaginární. Aby byla rovnost zachována, musí být i hodnota excentrické anomálie E imaginární (sinus imaginárního čísla je imaginární, zatímco kosinus imaginárního čísla je už reálný).

Aby se nám lépe počítalo a aby se nám v rovnicích vyskytovaly jen hodnoty reálné, zavedeme novou veličinu H vztahem $H = iE$. Pak funkce sinus přejdou ve svůj hyperbolický ekvivalent a kosinus také. Tudíž platí: $\sinh H = i\sin E$, $\cosh H = \cos E$.

Ohniskové polární rovnice pak budou mít nový tvar:

$$\begin{pmatrix} r\cos v \\ r\sin v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(\cosh H - e) \\ \frac{a}{2}\sqrt{1-e^2}\sinh H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|(e-\cosh H) \\ \frac{|a|}{2}\sqrt{e^2-1}\sinh H \end{pmatrix}.$$

Dostaneme též nové vztahy pro průvodič a pravou anomálii:

$$r = a(1-e\cosh H) = |a|(\cosh H - 1),\ \tan\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\tan\frac{H}{2}.$$

Keplerova rovnice nabyde tvaru:

$$\frac{H}{i} - e\frac{\sinh H}{i} = k_1 a^{-3/2}(t - T),$$

po úpravě

$$\mathbf{e}\sinh \mathbf{H} - \mathbf{H} = \mathbf{k_1}|\mathbf{a}|^{-\mathbf{3/2}}(\mathbf{t} - \mathbf{T}) = \mathbf{N},$$

kde N je analogií střední anomálie.

Platí také analogie třetího Keplerova zákona ve tvaru $n = k_1|a|^{-3/2}$, kde ale n nelze počítat podle vztahu $n = \frac{2\pi}{P_{ob}}$.

Keplerovy (geometrické) elementy dráhy

Pohybová rovnice je diferenciální rovnicí druhého řádu pro tři složky průvodiče r. Můžeme tedy při řešení očekávat zavedení šesti integračních konstant, které činí řešení jednoznačným.

Obrázek 3: Geometrické elementy dráhy

Ω	délka výstupného uzlu	$\Omega \in < 0°, 360°)$
a	velká poloosa dráhy	$a \in \mathsf{R}$
i	sklon ekliptiky	$i \in < 0°, 90°)$ pro *prográdní* pohyb,
		$i \in (90°, 180°)$ pro *retrográdní*
e	excentricita	$e \geq 0$
ω	argument perihelu	$\omega \in < 0°, 360°)$
T	okamžik průchodu perihelem	–

Parametry Ω a i popisují polohu roviny oběžné dráhy tělesa vůči referenční rovině (například ekliptice), a[1] a e formují tvar dráhy v rovině a ω definuje polohu hlavní osy v rovině dráhy. T je zbývajícím parametrem, který celý pohyb lokalizuje v čase.

[1] Při parabolickém pohybu a někdy též při pohybu po elipse se zavádí q – vzdálenost v perihelu a vztah mezi velkou poloosou a a vzdáleností v perihelu je dána vztahem $q = a(1 - e)$. Poznamenejme, že pro parabolický pohyb je $a = \infty$ a $e = 1$

Poznamenejme, že planety ve Sluneční soustavě se pohybují v rovinách velmi blízkých ekliptice (největší sklon má planeta Pluto kolem 18°). Z praktického hlediska je velmi oblížné definovat uzlovou přímku při malém sklonu oběžné roviny. Nepřesnosti určení uzlové přímky se projeví v nejistotách stanovení dalších Keplerových parametrů, především délky výstupného uzlu a argumentu perihelu.

Pozorný čtenář si všimne, že takto definované parametry mají jednu zajímavou vlastnost. Součet délky výstupného uzlu a argumentu perihelu je konstantní při libovolných hodnotách sklonu dráhy k ekliptice. Zavádíme proto novou veličinu, takzvaný *lomený úhel* $\tilde{\omega}$.

$$\tilde{\omega} = \omega + \Omega$$

Souřadnicové systémy

Soustavy souřadnic dělíme na **soustavy souřadnicové**, které definují typ soustavy (kartézské, sférické,...) a **soustavy vztažné**, jež souvisejí s konkrétním tělesem (např. geocentrická – vůči Zemi, topocentrická – vůči pozorovateli, barycentrická – vůči těžišti). Druhý typ nazýváme též **referenční soustavy**.

Několik poznámek na okraj:

- *těžiště Sluneční soustavy se nachází většinou uvnitř slunečního tělesa, jen vyjímečně vystoupí nad jeho povrch,*
- *vzdálenost Země-Slunce známe s přesností asi ±2,5 km, vzdálenost Země-Venuše s přesností ±100 m,*
- *pro astrometrii s rozumnou přesností je zapotřebí znalost polohy středu Země s přesností ±30 km,*
- *referenční soustava založená na rádiových pozorováních je asi tisíckrát přesnější, než soustava založená na pozorováních provedených v optickém oboru spektra,*
- *při použití referenční soustavy založené na radiových pozorováních je zapotřebí započíst i takové jevy, jako je gravitační vliv na elektromagnetické záření.*

Souřadnicové systémy v astronomii

V astronomii používáme několikero souřadnicových soustav, z nichž každá je vhodná pro jiné použití. Používáme soustavu *kartézskou*, *ekvatoreální (rovníkovou) I. a II. druhu*, *horizontální*, *galaktickou* a *ekliptikální*.

Pro naše souřadnicové sítě zvolíme jednotkovou sféru, již nazveme *nebeskou*. Referenční rovinu označíme XY. Kartézské souřadnice nejsou pro mnohé výpočty zrovna nejvhodnější, proto je vhodné je převést do souřadnic sférických. Protože je ale naše nebeská sféra jednotková, zajímají nás vlastně pouze úhlové souřadnice. Nazvěme je *rektascenzí* α a *deklinací* δ. Takto definujeme **ekvatoreální soustavu II. druhu**, označujme ji nadále **QII**. Rovina XY je rovinou zemského rovníku, směr osy Z je rovnoběžný s rotační osou Země. Tímto způsobem se jen definuje smysl soustavy QII, neboť směr rotační osy Země v prostoru se s časem mírně mění. Rektascenze pak symbolizuje úhel měřený v rovině XY od význačného směru, kterým je směr k *jarnímu bodu* (v současnosti se nacházejícím v souhvězdí Ryb), deklinace je odchylka mezi rovinou XY a přímkou, spojující počátek kartézské soustavy a bod, jehož souřadnice určujeme. Libovolné kružnice, jež mají střed totožný se středem sféry se nazývají *hlavní kružnice*.

Obrázek 4: Rovníková soustava II. druhu

Jinou soustavou je **soustava ekliptikální**, kterou budeme nadále označovat **E**. V ní bude referenční rovinou rovina ekliptiky a osa Z bude mířit do severního pólu ekliptiky. Zavádíme jiné dva úhly, a to *ekliptikální délku* λ a *ekliptikální šířku* β. Víme, že úhel mezi rovinou rovníku a rovinou ekliptiky je $\varepsilon = 23.5°$. Budeme se snažit převést souřadnice v jedné soustavě do druhé.

Pro polohový vektor $\vec{r}$ v rovníkové soustavě II. druhu platí:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{QII} = \begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix}.$$

Pro tentýž polohový vektor v souřadnicích ekliptikálních platí obdobné vztahy:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{E} = \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\lambda \\ \cos\beta\sin\lambda \\ \sin\beta \end{pmatrix}.$$

Vsuvka o maticích rotace

Mějme v rovině dvě kartézské soustavy souřadnic x, y a x', y', vzájemně pootočené o úhel ψ. Z matematiky si pamatujeme, že vzájemný převod obou soustav na sebe je pomocí matice rotace.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Dokažme tento vztah přes komplexní čísla: Mějme bod A, který bude mít v komplexní rovině souřadnice (x, y) v jedné soustavě a (x', y') v soustavě druhé. Získáme jejich vyjádření v algebraickém a goniometrickém tvaru: $x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ a $x' + iy' = r(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$. Dále víme, že $\varphi' = \varphi - \psi$. Dosaďme do rovnice pro goniometrický tvar komplexního čísla A v soustavě x', y' a použijme součtový vzorec.

$$\underbrace{r\cos\varphi}_{x}\cos\psi + \underbrace{r\sin\varphi}_{y}\sin\psi + i\,\underbrace{r\sin\varphi}_{y}\cos\psi - i\,\underbrace{r\cos\varphi}_{x}\sin\psi = x' + iy'$$

Pak porovnejme reálné a imaginární části:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\psi + y\sin\psi \\ -x\sin\psi + y\cos\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

V rovině jsme tedy tento vztah dokázali. V prostoru se rotace kolem jedné osy příliš nemění – matice se rozšíří do rozměru 3×3 a zbývající prvky se dodělají tak, aby osa, kolem níž probíhá rotace, zůstala během celého jevu neměnná. Označme matici rotace kolem osy x o úhel α symbolem $\mathsf{R}_x(\alpha)$.

Jednotlivé matice rotace mají pak tvar:

$$\mathsf{R}_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},\ \mathsf{R}_y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{R}_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Převod ze soustavy **QII** do **E** je vlastně rotací kolem osy x o úhel $\varepsilon = 23,5°$. Platí pro něj vztah:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ 0 & -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{QII}.$$

Protože je rotace kolem osy x z grupy rotací, platí pro ni: $\mathsf{R}_x^{-1}(\varphi) = \mathsf{R}_x^T(\varphi)$. Pak opačná transformace má tvar:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{QII} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon \\ 0 & \sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_E.$$

Ani ekliptikální a rovníkové souřadnice II. druhu ale nestačí pro astronomickou praxi. Pro pozorovatele (nejen) pracujícího u dalekohledu mají význam další dva typy souřadnic, které jsou odvozeny z jeho aktuálního pohledu na oblohu a budou se tedy místo od místa měnit a budou se měnit v čase. Mluvíme o souřadnicích **horizontálních** (označujme je dále **H**) a **rovníkových souřadnicích I. druhu** (s označením **QI**).

Obrázek 5: Vztahy mezi rovníkovými souřadnicemi I. druhu a horizontálními souřadnicemi.

Hlavní kružnice, jež prochází na nebeské sféře západním a východním bodem, se nazývá *první vertikál*. Úhlová vzdálenost severního nebeského pólu a zenitu, tedy místa, které se nachází přímo nad pozorovatelem, je rovna $90° - \varphi$, kde φ je zeměpisná šířka pozorovatelova stanoviště.

Pro **horizontální souřadnice** zavádíme dva úhly: *h výšku objektu nad obzorem* a A jeho *azimut*, což je úhel mezi jižním bodem a patou výškové kružnice měřený ve směru S→W→N→E→S. Někdy se místo výšky nad obzorem h používá *zenitová vzdálenost z*, jež se z výšky nad obzorem vypočítá jako doplněk do 90°.

Rovníkové souřadnice I. druhu jsou velmi podobné rovníkovým souřadnicím II. druhu. Zůstává odchylka od roviny nebeského rovníku, *deklinace* δ a má stejný význam a hodnoty jako v souřadnicích QII. Místo časově neproměnné rektascenze[2] zavádíme *hodinový úhel t*, jež má podobný význam jako azimut, jen je měřen na kružnicích rovnoběžných s nebeským rovníkem – měří se tedy od jižního bodu směrem na západ.

Hodinový úhel lze poměrně snadno přepočítat na rektascenzi pomocí rovnice $\theta = \alpha + t$, kde θ je takzvaný *místní hvězdný čas*. Je to jeden z časů používaných v astronomii a má tu vlastnost, že je měřen pomocí pohybů těles, v důsledku čehož je nerovnoměrný. [3]

[2] My dnes víme, že i rektascenze podléhá pomalým časovým změnám způsobeným jednak pohyby zemské osy v prostoru (nutace, precese), tak relativistickými efekty (aberace), ale i vlastními pohyby objektů.

[3] Proto se také zavádí *střední hvězdný čas* LMST, z něhož dále vychází pro nutlý poledník stanovený *Greenwichský hvězdný čas* GMST.

Pamatujme si, že rektascenze Slunce během roku roste!

Kulminací nazýváme průchod hvězdny hlavním poledníkem a v té době bude mít výšku nad obzorem danou rovnicí $h = 90^\circ - \varphi + \delta$.

Pokusme se opět sepsat návod, jak transformovat polohový vektor v soustavě horizontální do soustavy QI a obráceně.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_H = \begin{pmatrix} \cos h \cos(-A) \\ \cos h \sin(-A) \\ \sin h \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{QI} = \begin{pmatrix} \cos\delta \cos(-t) \\ \cos\delta \sin(-t) \\ \sin\delta \end{pmatrix}$$

Transformace od H k QI je rotací kolem osy y o úhel $90^\circ - \varphi$. Transformace opačná je rotace kolem osy y o úhel $\varphi - 90^\circ$. Není snad nutné explicitně vypisovat příslušné vztahy.

Tranformace od QI ke QII a obráceně se děje pomocí formulky $\theta = \alpha + t$.

Transformaci od QII k E provedeme pomocí rotace kolem osy x o úhel ε.

Vzájemné převody je vhodné (a nejjednodušší) provádět pomocí naznačených vztahů v postupné řadě:

$$H \xrightarrow{\mathsf{R}_y(\varphi-90^\circ)} QI \xrightarrow{\alpha=\theta-t} QII \xrightarrow{\mathsf{R}_x(\varepsilon)} E,$$
$$E \xrightarrow{\mathsf{R}_x(-\varepsilon)} QII \xrightarrow{t=\theta-\alpha} QI \xrightarrow{\mathsf{R}_y(90^\circ-\varphi)} H.$$

Aby nebylo všem souřadnicím dost, zavádí se v astronomii ještě **souřadnice galaktické** (značené **G**), jež jsou opět charakterizovány dvěma úhly: *galaktickou délkou* l a *galaktickou šířkou* b.

Obrázek 6: Galaktické souřadnice

Referenční rovinou je rovina Galaxie, počátek soustavy souřadné je ve Slunci. Referenčním směrem je směr ke středu Galaxie. Pro naše účely jsou definovány rovníkové souřadnice II. druhu galaktického pólu Γ následovně: $\alpha_0 = 12^h 49^m$ a $\delta_0 = 27,4^\circ$. Odchylka referenční osy rovníkových souřadnic II. druhu a galaktických souřadnic je rovna $\theta = 123^\circ$.

Transformace galaktických souřadnic v rovníkové II. druhu už není tak jednoduchá a sestává se ze tří kroků:

1. Otočíme osy x_{QII}, aby jarní bod splynul s průsečíkem rovníků obou soustav (jde o operaci $\mathsf{R}_{z_{QII}}(90^\circ - \alpha_0)$,

2. rovinu rovníku otočíme do galaktické roviny (jde o operaci $\mathsf{R}_x(90^\circ - \delta_0)$,

3. provedeme splynutí os x_{QII} a x_G, jde o operaci $\mathsf{R}_{z_{QII}=z_G}(-\theta + 90^\circ)$).

Celková transformace má tvar:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_G = \mathsf{R}_z(90^\circ - \theta)\mathsf{R}_x(90^\circ - \delta_0)\mathsf{R}_z(90^\circ - \alpha_0) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{QII} .$$

Několik poznámek na závěr:

- **H** a **QI** se hodí pro pozorování oblohy, úzce souvisejí se souřadnicemi na dělených kruzích dalekohledu v závislosti na typu jeho montáže. Tyto souřadnice závisejí výrazně na čase a jsou ovlivněny rotací Země. Souřadnice z nebo h je navíc ovlivněna astronomickou refrakcí.

- **E** jsou vhodné pro popis jevů ve Sluneční soustavě nebo mapy zodikálního světla. Pomalu se mění v důsledku precese a nutace a v důsledku aberací.

- **QII** jsou vhodné pro katalogy a mapy. Pro jejich časovou proměnlivost platí totéž, co pro souřadnice ekliptikální.

- **G** jsou nejvhodnější souřadnice pro popis rozložení útvarů v Galaxii, ale i ve vzdálenějším vesmíru.

Krátké poznámky o sférické geometrii

Obrázek 7: Sférický trojúhelník.

Základem našich sférických úvah bude jednotková sféra a hlavní kružnice na ní. Pak vektory $\vec{A}$, $\vec{B}$ a $\vec{C}$ se společným počátkem ve středu sféry vytínají na povrchu sféry sférický trojúhelník, označme průsečíky vektorů se sférou A, B a C. Označme a, b, c strany sférického trojúhelníka, přičemž mají vlastně význam úhlů sevřených jednotlivými vektory $\vec{A}$, $\vec{B}$ nebo $\vec{C}$. Dále označme α, β a γ vnitřní úhly našeho sférického trojúhelníka. Pro takový prostorový obrazec odvoďme sinovou a kosinovou větu.

Pro vektory v trojúhelníku zcela jistě platí vztah $\vec{A} \cdot \vec{C} = c$ a další vztahy cyklickou záměnou. Pro tečné vektory v bodech A, B a C ve směru na další z bodů platí: $\vec{t_{CA}} \cdot \vec{t_{CB}} = \cos\gamma$ a $\vec{t_{CA}} \times \vec{t_{CB}} = \sin\gamma \vec{C}$.

Protože je tečný vektor $\vec{t_{CA}}$ komplanární s vektory $\vec{A}$ a $\vec{C}$, můžeme jej napsat jako lineární kombinaci obou vektorů, tedy $\vec{t_{CA}} = m\vec{A} + n\vec{C}$. Pro určení hodnot konstant vynásobme rovnici skalárně nejprve vektorem $\vec{t_{CA}}$ a pak vektorem $\vec{C}$. Získáme rovnice:

$$\vec{t_{CA}} \cdot \vec{t_{CA}} = m \vec{t_{CA}} \cdot \vec{A} + n \vec{t_{CA}} \cdot \vec{C} \;\Rightarrow\; 1 = m \sin b + 0 \;\Rightarrow\; m = \frac{1}{\sin b},$$

$$\vec{C} \cdot \vec{t_{CA}} = m \vec{C} \cdot \vec{A} + n \vec{C} \cdot \vec{C} \;\Rightarrow\; 0 = m \cos b + n \;\Rightarrow\; n = -\frac{\cos b}{\sin b}.$$

Pro tyto vztahy platí cyklická záměna. Rozepišme si tedy skalární součin $\vec{t_{CA}} \cdot \vec{t_{CB}}$;

$$\cos\gamma = \left(\frac{1}{\sin b}\vec{A} - \frac{\cos b}{\sin b}\vec{C}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sin a}\vec{B} - \frac{\cos a}{\sin a}\vec{C}\right) =$$

$$\ldots = \frac{\cos c}{\sin a \sin b} - \frac{\cos a \cos b}{\sin b \sin a} - \frac{\cos a \cos b}{\sin a \sin b} + \frac{\cos b \cos a}{\sin a \sin b}.$$

Převedením jmenovatelů na druhou stranu dostaneme rovnici

$$\cos \mathbf{c} = \cos \mathbf{a} \cos \mathbf{b} + \sin \mathbf{a} \sin \mathbf{b} \cos\gamma,$$

která je nazývána **sférickou kosinovou větou**.

Z vektorového násobení týchž vektorů dostaneme:

$$\sin\gamma \vec{C} = \left(\frac{1}{\sin b}\vec{A} - \frac{\cos b}{\sin b}\vec{C}\right) \times \left(\frac{1}{\sin a}\vec{B} - \frac{\cos a}{\sin a}\vec{C}\right).$$

Jednoduchou úpravou dostaneme rovnici

$$\sin b \sin a \sin\gamma = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C},$$

pro niž také platí cyklická záměna. Podstatou celého triku je fakt, že hodnota smíšeného součinu na pravé straně je stejná při cyklické záměně. Pak dostaneme tři rovnosti:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin \mathbf{a}} = \frac{\sin\beta}{\sin \mathbf{b}} = \frac{\sin\gamma}{\sin \mathbf{c}},$$

který je nazýván **sférickou sinovou větou**.

Nautický trojúhelník

Obrázek 8: Nautický trojúhelník

V dávných dobách uměl každý námořník počítat nautický trojúhelník (viz obrázek), čili trojúhelník daný zenitem, severním pólem a polohou hvězdy. V tomto trojúhelníku známe veškeré strany i úhly a můžeme se na něj podívat z jiné strany, než ze sférické geometrie. Podívejme se na něj z pohledu souřadnicových soustav a proveďme mezi nimi transformaci. Půjde nám o převod *rovníkových souřadnic I. druhu* do *horizontálních*. Napřed ale napišme sinové a kosinové věty pro sférický nautický trojúhelník. Získáme tři rovnice:

$$\cos z = \underbrace{\cos(90^\circ - \delta)}_{\sin\delta} \sin\varphi + \underbrace{\sin(90^\circ - \delta)}_{\cos\delta} \cos\varphi \cos t,$$

$$\underbrace{\cos(90^\circ - \delta)}_{\sin\delta} = \cos z \sin\varphi - \sin z \cos\varphi \underbrace{\cos(180^\circ - A)}_{\cos A},$$

$$\frac{\sin t}{\sin z} = \frac{\sin A}{\cos\delta}.$$

A nyní proveďme transformaci souřadnic:

$$\begin{pmatrix} \cos\delta\cos t \\ -\cos\delta\sin t \\ \sin\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin z\cos A \\ -sinz\sin A \\ \cos z \end{pmatrix}.$$

Proveďme tuto tranformaci explicitně. Dostaneme tři rovnice:

$$\cos\delta\cos t = \sin\varphi\sin z\cos A + \cos\varphi\cos z,$$

$$-\cos\delta\sin t = -\sin z\sin A,$$

$$\sin\delta = -\cos\varphi\sin z\cos A + \sin\varphi\cos z.$$

Snadným porovnáním zjistíme, že dvě z rovnic lze ztotožnit s úvahami ze sférických kosinových vět. První rovnici ale ztotožnit nelze, mohli bychom to udělat v případě, kdybychom si uvedli tvar sférické sinus-kosinové věty.

Poslední poznámky k problému dvou těles

Budeme se nejprve zabývat vlastnostmi druhého ohniska Keplerovy elipsy. Než se do toho ale pustíme, udělejme si krátkou historickou odbočku.

Na začátku našeho letopočtu žil v Egyptě astronom *Claudius Ptolemaios* (90 - 150 pnl), jež se stal autorem známé a ještě do středověku uznávané encyklopedie astronomie – *Almagestu.* Ptolemaios byl horlivým zastáncem geocentrického systému, tedy systému, v jehož středu se nachází planeta Země a ostatní tělesa obíhají okolo ní. Oběh každého tělesa se skládal ze dvou rovnoměrných kruhových pohybů – po pohybu po malém *epicyklu*, jehož střed obíhal kolem Země po velkém *deferentu.* Planety kolem Země obíhaly v pořadí: Měsíc, Merkur, Venuše, Slunce, Mars, Jupiter a Saturn. Oběh každé planety měl nějakou tu zvláštnost.

- pro Měsíc teorie epicyklu a deferentu moc nefungovala, tak se přidal další epicykl,
- středy epicyklů Merkuru a Venuše se pohybovaly zároveň se Sluncem,
- průvodiče epicyklů Marsu, Jupiteru a Saturnu jsou neustále rovnoběžné.

Při řešení pohybů se objevilo několik problémů:

- bylo těžké stanovit poloměry deferentů a epicyklů,
- pohyb v ekliptikální délce byl oddělen od pohybu v ekliptikální šířce, oba pohyby měly i jiný způsob popisu.

Řešením se ukázalo umístit Zemi ne do středu všech deferentů, ale mírně mimo, do bodu zvaného *ekvant.* Pohyb průvodiče planety byl pak sice rovnoměrný, ale měnila se jeho velikost.

Poté, co Johannes Kepler odvodil svoji rovnici, spočítal si, jak by vypadal pohyb těles, kdybychom se na něj dívali z druhého ohniska. A my budeme následovat jeho kroky.

Označme r a s průvodiče bodu P elipsy pro obě ohniska, v pravou anomálii (odchylku přímky spojující „první“ ohnisko a bod P od velké poloosy, w její analogii u druhého ohniska, značme jej dále *P.E.* (*punktus ekvants*).

Pak z geometrie platí: $s+r = 2a$, $r \sin v = s \sin w$ a $r \cos v + 2ae = s \cos w$. Dokažme si některá tvrzení:

1. $r\,dv = s\,dv$. Důkaz provedeme z úvah o obou průvodičích. Diferencováním první rovnice dostaneme: $dr = -ds$. Hrajme si dále s průvodiči:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v} \quad s = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(180^\circ - w)}.$$

Tyto vztahy diferencujme:

$$dr = a(1-e^2)\frac{e\sin v\,dv}{(1+e\cos v)^2} \qquad ds = a(1-e^2)\frac{-e\sin v\,dv}{(1-e\cos w)^2}.$$

Dosaďme $ds = -dr$ a pokračujme v úpravách. Obě strany rovnice vynásobme výrazem $a(1-e^2)$.

$$\left(\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}\right)^2 \sin v\,dv = \left(\frac{a(1-e^2)}{1-e\cos w}\right)^2 \sin w\,dw$$

Dosaďme zpět vyjádření jednotlivých průvodičů a využijme faktu, že $r\sin v = s\sin w$:

$$r^2\sin v\,dv = s^2\sin w\,dw \;\Rightarrow\; r\,dv = s\,dw,$$

což jsme chtěli dokázat.

2. Napišme druhý Keplerův zákon pro druhé ohnisko:

$$r^2\dot{v} = C \;\Rightarrow\; r^2\,dv = C dt.$$

S použitím výše dokázaného pak:

$$rs\,dw = C\,dt \;\Rightarrow\; rs\dot{w} = C,$$

což je jedna z forem druhého Keplerova zákona pro ohnisko. Pozor na mírnou kolizi v označení, neboť symbol w je zde použit ve významu plošné rychlosti, ne jako ekvivalent pravé anomálie v druhém ohnisku.

3. Dokažme, že pohyb pozorovaný z druhého ohniska je zhruba rovnoměrný. Matematicky řečeno $\frac{dw}{dt} \doteq konstanta$. Použijme druhý Keplerův zákon pro druhé ohnisko:

$$\dot{w} = \frac{C}{rs} = \frac{C}{a^2(1-e\cos E)(1+e\cos E)} = \frac{C}{a^2(1-e^2\cos^2 E)} \doteq \frac{C}{a^2},$$

protože e je číslo mezi nulou a jedničkou, pro Sluneční soustavu číslo velmi blízké nule, kosinus má obor hodnot mezi minus jedničkou a jedničkou. V důsledku toho je člen $e^2\cos^2 E$ číslo blížící se nule a tvrzení je dokázáno.

4. V bodě $P.E.$ je úhlová rychlost w nejlépe konstantní. Toto tvrzení ponechme bez důkazu.

Pohyb po degenerovaných kuželosečkách

Jak již víme, pohyb po kuželosečce může za jistých okolností zdegenerovat. Jestliže v elipse budeme zvyšovat hodnotu numerické excentricity e k jedné a přitom držet hlavní poloosu a konstantní, dostaneme v limitním případě úsečku. Podobně, když budeme zavírat parabolu nebo hyperbolu, dostaneme v limitním případě polopřímku – obě se budou lišit jen tím, jakou hodnotu velikosti rychlosti bude mít pohybující se těleso v nekonečnu. V případě degenerované paraboly bude tato hodnota nulová, v případě degenerované hyperboly bude tato hodnota kladná.

Pohyb po úsečce si můžeme představit jako pád z hodně velké výšky. Řešíme pohybovou rovnici:

$$m\ddot{x} = -G\frac{Mm}{x^2}.$$

Pro snazší počítání si zaveďme bezrozměrné souřadnice: $\xi = \frac{x_0 - x}{x_0}$, kde x_0 je původní vzdálenost těles o hmotnostech M a m, a $\tau = \frac{t}{t_0}$, kde t_0 je zatím blíže neurčená konstanta. Nadále rozlišujme derivaci podle t a derivaci podle τ zavedením označení $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ a $\xi' = \frac{d\xi}{d\tau}$. Pak pohybovou rovnici přepíšeme do nových proměnných následovně:

$$\xi'' = GM\frac{t_0^2}{x_0^3}\frac{1}{(1-\xi)^2}.$$

Požadujeme, aby hromada konstant před výrazem $\frac{1}{(1-\xi)^2}$ byla rovna $\frac{1}{2}$. Proto bude hodnota t_0 rovna $t_0 = \sqrt{\frac{x_0^3}{2GM}}$.

Řešme dále pohybovou rovnici v novém tvaru:

$$2\xi'' = \frac{1}{(1-\xi)^2} \;\Rightarrow\; 2\xi''\xi' = \frac{\xi'}{(1-\xi)^2} \;\Rightarrow\; \frac{d}{d\tau}\xi'^2 = \frac{d}{d\tau}\frac{1}{1-\xi}.$$

Tedy

$$\xi'^2 = \frac{1}{1-\xi} + konstanta.$$

Konstantu určíme z počátečních podmínek. Pro $\tau = 0$ a $\xi = 0$ je i $\xi' = 0$ a tedy $konstanta = 1$. Máme tedy rovnici:

$$\xi'^2 = \frac{\xi}{1-\xi},$$

jejímž řešením je cykloida. Cykloida je křivka, jíž nelze vyjádřit explicitně, ale pouze parametricky. Parametrem pro nás bude zřejmě veličina ξ'. Přímo z rovnice lze vypočítat ξ pomocí ξ':

$$\xi = \frac{\xi'}{\mathbf{1} + \xi'^{\mathbf{2}}}.$$

Protože $\xi' = \frac{d\xi}{d\tau}$, je:

$$d\tau = \frac{d\xi}{\xi'} = \frac{1}{\xi'}\, d\left(\frac{\xi'^2}{1+\xi'^2}\right) = d\left(\frac{1}{\xi'}\frac{\xi'^2}{1+\xi'^2}\right) - \frac{\xi'^2}{1+\xi'^2}\, d\left(\frac{1}{\xi'}\right).$$

Z toho lze již vypočíst integrací τ jako funkci parametru ξ':

$$\frac{\xi'}{1+\xi'^2} + \arctan\xi' = \tau + konstanta,$$

kde $konstanta = 0$ z počátečních podmínek.

Získali jsme parametrické vyjádření souřadnice ξ a τ pomocí parametru ξ'.

Cykloida má ale geometrické rovnice mírně odlišné a jdou funkcí úhlu odvalení φ. Parametrické rovnice mají tvar:

$$\tau = \frac{1}{2}(\varphi + \sin\varphi) \ \text{ a } \xi = \frac{1}{2}(1-\cos\varphi)$$

Zkusme najít vztah mezi úhlem odvalení φ a veličinou ξ'. A zkusme přímo otestovat hypotézu, že $\xi' = \tan\frac{\varphi}{2}$:

$$\tau = \frac{\tan\frac{\varphi}{2}}{1+\tan^2\frac{\varphi}{2}} + \frac{\varphi}{2} = \frac{\sin\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2},$$

$$\xi = \frac{\tan^2\frac{\varphi}{2}}{1+\tan^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{\frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}} = \sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos\varphi).$$

Čímž jsme dokázali, že výsledná křivka pohybu má skutečně tvar cykloidy.

Věnujme se druhému případu degenerované kuželosečky, degenerované parabole. Fyzikálně se jedná vlastně o pád z nekonečna. Zvolme počáteční podmínky: $t = 0$, $\dot{x} = v_u = \sqrt{\frac{2GM}{x_0}}$ a zaveďme opět bezrozměrné souřadnice $\xi = \frac{x}{x_0}$ a $\tau = \frac{t}{t_0}$ a řešme pohybovou rovnici:

$$\ddot{x} = -G\frac{M}{x},$$

převedením do nových souřadnic

$$\xi'' = -\frac{t_0^2}{x_0^3}GM\frac{1}{\xi^2},$$

kterou řešme obdobným způsobem, jako v minulém příkladě:

$$2\xi''\xi' = -\frac{\xi'}{\xi^2} \ \Rightarrow\ \frac{d}{dt}\xi'^2 = \frac{d}{dt}\frac{1}{\xi} \ \Rightarrow\ \xi'^2 = \frac{1}{\xi} + c.$$

Hodnota konstanty c vyplývá z počátečních podmínek a je rovna $c = \frac{2GM}{x_0} - 1$, ale označujme ji pro snazší počítání nadále c.

Pak řešíme rovnici:

$$\sqrt{\frac{\xi}{1+c\xi}}\, d\xi = d\tau,$$

jejímž řešením je hledaný pohyb.

Limitní přechod mezi pohybem po protáhlé a úzké elipse k pohybu po úsečce

Nakresleme si úzkou a protáhlou elipsu. Pohyb planety jako obvykle začíná v perihelu Π a pravou anomálií $v = 0$. Hodnota pravé anomálie se náhle prakticky skokově změní na hodnotu $= 180°$. Zavedeme-li Keplerovu kružnici, excentrická anomálie takového bodu bude ale pořád dobře definovaná a bude se plynule a monotónně měnit v intervalu $E \in < 0°, 180° >$. Parametr takové elipsy se bude s rostoucí excentricitou zmenšovat a v limitním případě dosáhne nuly: $p = a(1-e^2) \xrightarrow{e \to 1^-} 0$.

Jenže pohyb, který my zkoumáme, je vlastně pád z afelu A. V tomto bodě je excentrická anomálie $E = 180°$, pravá anomálie $v = 180°$ a úhel odvalení cykloidy $\varphi = 0°$. Dále si všimněme, že parametrické vyjádření τ je velmi podobné Keplerově rovnici při $e = 1$ a $\varphi \approx E$. Podle hodnot jednotlivých úhlů v afelu zkusme vzít $\varphi = 180° - E$. Pro méně psaní nahraďme $180°$ ve stupňové míře stejnou hodnotou v míře obloukové, tedy $\varphi = \pi - E$.

$$\tau = \frac{1}{2}[\pi - E + \sin(\pi - E)] = \frac{1}{2}(\pi - E + \sin E) = \frac{t}{t_0} =$$

$$= \sqrt{\frac{GM}{4a^3}}(-t' \pm \frac{P_{ob}}{2}) = \frac{1}{2}\left[-\sqrt{\frac{GM}{a^3}} \pm \pi\right],$$

kde čas t' je počítán od průchodu perihelem a má proti pádu z afelu opačné znaménko.

Pak rovnice nabyde tvaru: $E - \sin E = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}t'$. Parametrická rovnice pro τ má tedy význam Keplerovy rovnice. Věnujme se druhé rovnici: $\xi = \frac{x_0 - x}{x}$, kde $x_0 = 2a$ a $x = a(\cos E - e)$. Pak

$$\xi = \frac{2a - a(\cos E - e)}{2a} = 1 - \frac{\cos E}{2} + \frac{e}{2} \xrightarrow{e \to 1^-} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos E$$

$$\xrightarrow{\varphi = \pi - E} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\pi - \varphi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\varphi,$$

což je vyjádření druhé parametrické rovnice z úvah o elipse.

Počítání efemerid v problému dvou těles

Výchozím bodem výpočtu efemeridy jsou Keplerovy elementy (a, e, i, Ω, ω a T). Pro nerušený pohyb budou tyto elementy po celou dobu jeho pohybu konstatní. Ve skutečnosti jsou pohyby ve vesmíru vždy rušené a všechny parametry jsou pomalu proměnné v čase. Tedy dokonalá elipsa se skutečné dráze vždy jen přimyká, tvoří *oskulační elipsu.* Protože Keplerovy elementy jsou konstantní a platí se stanovenou přesností vždy jen kousek dráhy, říkáme jim *oskulační elementy.*

Výpočet efemeridy u komet a planetek pak ve skutečnosti probíhá tak, že používáme oskulační elementy vždy jen na krátké úseky dráhy, kdy vyhovují se stanovenou přesností.

Postup při výpočtu efemeridy

1. Pro čas t vypočteme střední anomálii M: $M = n(t - T)$.
2. Řešíme Keplerovu rovnici a dostaneme excentrickou anomálii E: $E - e \sin E = M$.
3. Z excentrické anomálie stanovíme souřadnice v rovině dráhy tělesa (osa x směřuje k perihelu)
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(\cos E - e) \\ a\sqrt{1 - e^2}\sin E \\ 0 \end{pmatrix}$$
4. Provedeme rotaci souřadnicových soustav
   (a) Osu x otočíme do uzlové přímky: $\mathsf{R}_z(-\omega)$.
   (b) Sklopíme rovinu dráhy do roviny ekliptiky: $\mathsf{R}_x(-i)$.
   (c) Osu x ztotožníme se směrem k jarnímu bodu: $\mathsf{R}_z(-\Omega)$.

   Dohromady tedy máme operaci $\mathsf{R}_z(-\Omega)\mathsf{R}_x(-i)\mathsf{R}_z(-\omega)$, což je matice 3×3. Napišme si ji:
$$\begin{pmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{pmatrix}.$$
   Poslední sloupec nás vůbec nezajímá, protože výsledkem jeho aplikace na polohový vektor v rovině dráhy bude nula (působí na z-tovou souřadnici, která je nulová). Ostatním šesti prvkům matice se říká *vektorové elementy* dráhy.

   Výsledkem jsou heliocentrické pravoúhlé souřadnice, sklopením o úhel $-\varepsilon$ kolem osy x je převedeme do heliocentrických ekvatoreálních.

5. Vypočítáme geocentrickou efemeridu (geocentrické ekvatoreální souřadnice). Máme pro tři tělesa (těleso, Zemi a Slunce) obecný vektorový trojúhelník, jehož jednotlivé strany označme: vektor Slunce→těleso $\vec{r}$ (*heliocentrický průvodič*), vektor Země→těleso $\vec{\rho}$ (*geocentrický průvodič*) a vektor Země→Slunce $\vec{R}$ (*pravoúhlé souřadnice Slunce*). Předchozím výpočtem jsme získali heliocentrický průvodič, pravoúhlé souřadnice Slunce najdeme v ročence nebo vypočítáme pomocí programové rutiny schválené Mezinárodní astronomickou unií (počítá se rozvojem). Co nás zajímá je geocentrický průvodič tělesa. Získáme tedy vlastně základ geocentrické efemeridy:

$$\vec{\rho}_{QII} = \vec{R} + \vec{r}_{QII}.$$

6. Provedeme opravy o aberace, nutaci, precesi.

7. Vypočítáme topocentrické souřadnice a opravíme je o rotaci Země (denní aberaci) a paralaxu.

Metody řešení Keplerovy rovnice

Keplerova rovnice $E - \sin E = M$ je transcendentním typem, který nelze vyřešit analyticky, ale jen numericky. Povězme si několik metod, jak tuto rovnici vyřešit.

1. V dobách prehistorických se tato rovnice řešila pomocí tabulek a nomogramů.

2. Přirozeným začátkem numerických výpočtů se stala nejjednodušší iterační metoda. Stanoví se prvotní nástřel (odhad) hodnoty excentrické anomálie a dosadí se do upravené rovnice, v níž na levé straně necháme jen lineární člen v E a na stranu pravou dáme zbytek. Vypočítáme E, porovnáme s předchozím výsledkem a jestliže jsme ještě nedosáhli požadované přesnosti, výpočet opakujeme. Postup je tedy asi takový:

   (a) $E_0 = M$,

   (b) $E_1 = M + e \sin E_0$,

   (c) $E_2 = M + e \sin E_1$,

   $\vdots$

   Výpočet končí v okamžiku, kdy $|E_n - E_{n-1}|$ je menší než zadaná přesnost.

3. Iterační metodou, která konverguje rychleji, než jednoduchá iterace, je Newtonova metoda, která pouze stanovuje, jak z přechozí hodnoty stanovit hodnotu následující, aby rychleji konvergovala do námi očekávaného výsledku.

4. Pro $e \to 1^-$ velmi dobře funguje **Hartmannův vzorec**, který funguje úplně stejně, jako Newtonova metoda, jen s jiným vzorcem, který si zde uvedeme:

$$E_{n+3} = M + e \sin \left[E_n + \frac{E_{n+1} - E_n}{1 - \frac{E_{n+2} - E_{n+1}}{E_{n+1} - E_n}} \right],$$

startovací hodnoty určíme obyčejnou iterační metodou, tedy $E_0 = M$, $E_1 = M + e \sin E_1$, $E_2 = M + e \sin E_1$.