

# Příspěvky ke globální aproximaci tíhových dat

**Bezděk A., Bosch W., Bouman J., Klokočník J., Kostelecký J.,  
Sebera J., Wagner C.A., Zeman A.**

Fakulta stavební ČVUT & Astronomický ústav AV ČR

**Seminář CEDR 2011, Třešť**

14.11. - 16.11., 2011

## 1 Úvod

- Globální aproximace
- Rozdělení tématu (2 v 1)

## 2 Optimalizace výpočtu ALF 2. druhu

- Elipsoidální reprezentace
- Výpočet ALF 2. druhu a Jekeliho renormalizace
- Hypergeometrická funkce a její optimalizace
- Numerické experimenty

## 3 Lineární model pro MNČ SHA

- Obecný model SHA
- Hotineho rovnice
- Lineární model s Hotineho rovnicemi
- Numerické experimenty

## 4 Shrnutí

## 1 Úvod

- Globální aproximace
- Rozdělení tématu (2 v 1)

## 2 Optimalizace výpočtu ALF 2. druhu

- Elipsoidální reprezentace
- Výpočet ALF 2. druhu a Jekeliho renormalizace
- Hypergeometrická funkce a její optimalizace
- Numerické experimenty

## 3 Lineární model pro MNČ SHA

- Obecný model SHA
- Hotineho rovnice
- Lineární model s Hotineho rovnicemi
- Numerické experimenty

## 4 Shrnutí

## 1 Úvod

- Globální aproximace
- Rozdělení tématu (2 v 1)

## 2 Optimalizace výpočtu ALF 2. druhu

- Elipsoidální reprezentace
- Výpočet ALF 2. druhu a Jekeliho renormalizace
- Hypergeometrická funkce a její optimalizace
- Numerické experimenty

## 3 Lineární model pro MNČ SHA

- Obecný model SHA
- Hotineho rovnice
- Lineární model s Hotineho rovnicemi
- Numerické experimenty

## 4 Shrnutí

## 1 Úvod

- Globální aproximace
- Rozdělení tématu (2 v 1)

## 2 Optimalizace výpočtu ALF 2. druhu

- Elipsoidální reprezentace
- Výpočet ALF 2. druhu a Jekeliho renormalizace
- Hypergeometrická funkce a její optimalizace
- Numerické experimenty

## 3 Lineární model pro MNČ SHA

- Obecný model SHA
- Hotineho rovnice
- Lineární model s Hotineho rovnicemi
- Numerické experimenty

## 4 Shrnutí

## Co myslíme globální aproximací gravitačního pole?

- Jde o zpracování globálně distribuovaných tíhových dat na povrchu Země pomocí vhodného funkčního aparátu
- Jako funční aparát zde budeme uvažovat deriváty Laplaceovy rovnice  $\Delta V = 0 \Rightarrow$  sférické a elipsoidální harmonické funkce
- Podle přístupu k řešení zde rozdělíme na přístup obecné a přístup s využitím nějakého zjednodušení (symetrie)

### Obecný přístup (ne-grid data)

- Snaží se do problému zavádět minimum zjednodušení např. o geometrickém rozložení dat, referenční soustavě dat, ...
- Přístup obvykle vede na velké soustavy lin. rovnic  $\Rightarrow$  MNČ řešení
- Např. družicové modely ITG03, ITG10, EIGEN6s o nízkém  $n_{max} \leq 360$

### Přístup symetrie (grid data)

- Předpoklad rovnoměrného rozložení dat (ekvidistance)  $\Rightarrow$  exaktní kvadratury, FFT
- Předpoklad LNOFe  $\Rightarrow$  bez elips. korekcí
- Předpoklad LNOFs  $\Rightarrow$  možno použít standardní rovnice (Koop, Rummel, Petrovskaya, ...)
- Možno vyšší  $n_{max}$ , např. EGM2008 s 2160(2190).

## Co myslíme globální aproximací gravitačního pole?

- Jde o zpracování globálně distribuovaných tíhových dat na povrchu Země pomocí vhodného funkčního aparátu
- Jako funční aparát zde budeme uvažovat deriváty Laplaceovy rovnice  $\Delta V = 0 \Rightarrow$  sférické a elipsoidální harmonické funkce
- Podle přístupu k řešení zde rozdělíme na přístup obecné a přístup s využitím nějakého zjednodušení (symetrie)

### Obecný přístup (ne-grid data)

- Snaží se do problému zavádět minimum zjednodušení např. o geometrickém rozložení dat, referenční soustavě dat, ...
- Přístup obvykle vede na velké soustavy lin. rovnic  $\Rightarrow$  MNČ řešení
- Např. družicové modely ITG03, ITG10, EIGEN6s o nízkém  $n_{max} \leq 360$

### Přístup symetrie (grid data)

- Předpoklad rovnoměrného rozložení dat (ekvidistance)  $\Rightarrow$  exaktní kvadratury, FFT
- Předpoklad LNOFe  $\Rightarrow$  bez elips. korekcí
- Předpoklad LNOFs  $\Rightarrow$  možno použít standardní rovnice (Koop, Rummel, Petrovskaya, ...)
- Možno vyšší  $n_{max}$ , např. EGM2008 s 2160(2190).

## Co myslíme globální aproximací gravitačního pole?

- Jde o zpracování globálně distribuovaných tíhových dat na povrchu Země pomocí vhodného funkčního aparátu
- Jako funční aparát zde budeme uvažovat deriváty Laplaceovy rovnice  $\Delta V = 0 \Rightarrow$  sférické a elipsoidální harmonické funkce
- Podle přístupu k řešení zde rozdělíme na přístup obecné a přístup s využitím nějakého zjednodušení (symetrie)

### Obecný přístup (ne-grid data)

- Snaží se do problému zavádět minimum zjednodušení např. o geometrickém rozložení dat, referenční soustavě dat, ...
- Přístup obvykle vede na velké soustavy lin. rovnic  $\Rightarrow$  MNČ řešení
- Např. družicové modely ITG03, ITG10, EIGEN6s o nízkém  $n_{max} \leq 360$

### Přístup symetrie (grid data)

- Předpoklad rovnoměrného rozložení dat (ekvidistance)  $\Rightarrow$  exaktní kvadratury, FFT
- Předpoklad LNOFe  $\Rightarrow$  bez elips. korekcí
- Předpoklad LNOFs  $\Rightarrow$  možno použít standardní rovnice (Koop, Rummel, Petrovskaya, ...)
- Možno vyšší  $n_{max}$ , např. EGM2008 s 2160(2190).

## Co myslíme globální aproximací gravitačního pole?

- Jde o zpracování globálně distribuovaných tíhových dat na povrchu Země pomocí vhodného funkčního aparátu
- Jako funční aparát zde budeme uvažovat deriváty Laplaceovy rovnice  $\Delta V = 0 \Rightarrow$  sférické a elipsoidální harmonické funkce
- Podle přístupu k řešení zde rozdělíme na přístup obecné a přístup s využitím nějakého zjednodušení (symetrie)

### Obecný přístup (ne-grid data)

- Snaží se do problému zavádět minimum zjednodušení např. o geometrickém rozložení dat, referenční soustavě dat, ...
- Přístup obvykle vede na velké soustavy lin. rovnic  $\Rightarrow$  MNČ řešení
- Např. družicové modely ITG03, ITG10, EIGEN6s o nízkém  $n_{max} \leq 360$

### Přístup symetrie (grid data)

- Předpoklad rovnoměrného rozložení dat (ekvidistance)  $\Rightarrow$  exaktní kvadratury, FFT
- Předpoklad LNOFe  $\Rightarrow$  bez elips. korekcí
- Předpoklad LNOFs  $\Rightarrow$  možno použít standardní rovnice (Koop, Rummel, Petrovskaya, ...)
- Možno vyšší  $n_{max}$ , např. EGM2008 s 2160(2190).

## Co myslíme globální aproximací gravitačního pole?

- Jde o zpracování globálně distribuovaných tíhových dat na povrchu Země pomocí vhodného funkčního aparátu
- Jako funční aparát zde budeme uvažovat deriváty Laplaceovy rovnice  $\Delta V = 0 \Rightarrow$  sférické a elipsoidální harmonické funkce
- Podle přístupu k řešení zde rozdělíme na přístup obecné a přístup s využitím nějakého zjednodušení (symetrie)

### Obecný přístup (ne-grid data)

- Snaží se do problému zavádět minimum zjednodušení např. o geometrickém rozložení dat, referenční soustavě dat, ...
- Přístup obvykle vede na velké soustavy lin. rovnic  $\Rightarrow$  MNČ řešení
- Např. družicové modely ITG03, ITG10, EIGEN6s o nízkém  $n_{max} \leq 360$

### Přístup symetrie (grid data)

- Předpoklad rovnoměrného rozložení dat (ekvidistance)  $\Rightarrow$  exaktní kvadratury, FFT
- Předpoklad LNOFe  $\Rightarrow$  bez elips. korekcí
- Předpoklad LNOFs  $\Rightarrow$  možno použít standardní rovnice (Koop, Rummel, Petrovskaya, ...)
- Možno vyšší  $n_{max}$ , např. EGM2008 s 2160(2190).

## Co myslíme globální aproximací gravitačního pole?

- Jde o zpracování globálně distribuovaných tíhových dat na povrchu Země pomocí vhodného funkčního aparátu
- Jako funční aparát zde budeme uvažovat deriváty Laplaceovy rovnice  $\Delta V = 0 \Rightarrow$  sférické a elipsoidální harmonické funkce
- Podle přístupu k řešení zde rozdělíme na přístup obecné a přístup s využitím nějakého zjednodušení (symetrie)

### Obecný přístup (ne-grid data)

- Snaží se do problému zavádět minimum zjednodušení např. o geometrickém rozložení dat, referenční soustavě dat, ...
- Přístup obvykle vede na velké soustavy lin. rovnic  $\Rightarrow$  **MNČ řešení**
- Např. družicové modely ITG03, ITG10, EIGEN6s o nízkém  $n_{max} \leq 360$

### Přístup symetrie (grid data)

- Předpoklad rovnoměrného rozložení dat (ekvidistance)  $\Rightarrow$  **exaktní kvadratury, FFT**
- Předpoklad LNOFe  $\Rightarrow$  **bez elips. korekcí**
- Předpoklad LNOFs  $\Rightarrow$  **možno použít standardní rovnice (Koop, Rummel, Petrovskaya, ...)**
- Možno vyšší  $n_{max}$ , např. EGM2008 s 2160(2190).

## Co myslíme globální aproximací gravitačního pole?

- Jde o zpracování globálně distribuovaných tíhových dat na povrchu Země pomocí vhodného funkčního aparátu
- Jako funční aparát zde budeme uvažovat deriváty Laplaceovy rovnice  $\Delta V = 0 \Rightarrow$  sférické a elipsoidální harmonické funkce
- Podle přístupu k řešení zde rozdělíme na přístup obecné a přístup s využitím nějakého zjednodušení (symetrie)

### Obecný přístup (ne-grid data)

- Snaží se do problému zavádět minimum zjednodušení např. o geometrickém rozložení dat, referenční soustavě dat, ...
- Přístup obvykle vede na velké soustavy lin. rovnic  $\Rightarrow$  **MNČ řešení**
- Např. družicové modely ITG03, ITG10, EIGEN6s o nízkém  $n_{max} \leq 360$

### Přístup symetrie (grid data)

- Předpoklad rovnoměrného rozložení dat (ekvidistance)  $\Rightarrow$  **exaktní kvadratury, FFT**
- Předpoklad LNOFe  $\Rightarrow$  **bez elips. korekcí**
- Předpoklad LNOFs  $\Rightarrow$  **možno použít standardní rovnice (Koop, Rummel, Petrovskaya, ...)**
- Možno vyšší  $n_{max}$ , např. EGM2008 s 2160(2190).

## Co myslíme globální aproximací gravitačního pole?

- Jde o zpracování globálně distribuovaných tíhových dat na povrchu Země pomocí vhodného funkčního aparátu
- Jako funční aparát zde budeme uvažovat deriváty Laplaceovy rovnice  $\Delta V = 0 \Rightarrow$  sférické a elipsoidální harmonické funkce
- Podle přístupu k řešení zde rozdělíme na přístup obecné a přístup s využitím nějakého zjednodušení (symetrie)

### Obecný přístup (ne-grid data)

- Snaží se do problému zavádět minimum zjednodušení např. o geometrickém rozložení dat, referenční soustavě dat, ...
- Přístup obvykle vede na velké soustavy lin. rovnic  $\Rightarrow$  **MNČ řešení**
- Např. družicové modely ITG03, ITG10, EIGEN6s o nízkém  $n_{max} \leq 360$

### Přístup symetrie (grid data)

- Předpoklad rovnoměrného rozložení dat (ekvidistance)  $\Rightarrow$  **exaktní kvadratury, FFT**
- Předpoklad LNOFe  $\Rightarrow$  **bez elips. korekcí**
- Předpoklad LNOFs  $\Rightarrow$  **možno použít standardní rovnice (Koop, Rummel, Petrovskaya, ...)**
- Možno vyšší  $n_{max}$ , např. EGM2008 s 2160(2190).

## Co myslíme globální aproximací gravitačního pole?

- Jde o zpracování globálně distribuovaných tíhových dat na povrchu Země pomocí vhodného funkčního aparátu
- Jako funční aparát zde budeme uvažovat deriváty Laplaceovy rovnice  $\Delta V = 0 \Rightarrow$  sférické a elipsoidální harmonické funkce
- Podle přístupu k řešení zde rozdělíme na přístup obecné a přístup s využitím nějakého zjednodušení (symetrie)

### Obecný přístup (ne-grid data)

- Snaží se do problému zavádět minimum zjednodušení např. o geometrickém rozložení dat, referenční soustavě dat, ...
- Přístup obvykle vede na velké soustavy lin. rovnic  $\Rightarrow$  **MNČ řešení**
- Např. družicové modely ITG03, ITG10, EIGEN6s o nízkém  $n_{max} \leq 360$

### Přístup symetrie (grid data)

- Předpoklad rovnoměrného rozložení dat (ekvidistance)  $\Rightarrow$  **exaktní kvadratury, FFT**
- Předpoklad LNOFe  $\Rightarrow$  **bez elips. korekcí**
- Předpoklad LNOFs  $\Rightarrow$  **možno použít standardní rovnice (Koop, Rummel, Petrovskaya, ...)**
- Možno vyšší  $n_{max}$ , např. EGM2008 s 2160(2190).

## Co myslíme globální aproximací gravitačního pole?

- Jde o zpracování globálně distribuovaných tíhových dat na povrchu Země pomocí vhodného funkčního aparátu
- Jako funční aparát zde budeme uvažovat deriváty Laplaceovy rovnice  $\Delta V = 0 \Rightarrow$  sférické a elipsoidální harmonické funkce
- Podle přístupu k řešení zde rozdělíme na přístup obecné a přístup s využitím nějakého zjednodušení (symetrie)

### Obecný přístup (ne-grid data)

- Snaží se do problému zavádět minimum zjednodušení např. o geometrickém rozložení dat, referenční soustavě dat, ...
- Přístup obvykle vede na velké soustavy lin. rovnic  $\Rightarrow$  **MNČ řešení**
- Např. družicové modely ITG03, ITG10, EIGEN6s o nízkém  $n_{max} \leq 360$

### Přístup symetrie (grid data)

- Předpoklad rovnoměrného rozložení dat (ekvidistance)  $\Rightarrow$  **exaktní kvadratury, FFT**
- Předpoklad LNOFe  $\Rightarrow$  **bez elips. korekcí**
- Předpoklad LNOFs  $\Rightarrow$  **možno použít standardní rovnice (Koop, Rummel, Petrovskaya, ...)**
- Možno vyšší  $n_{max}$ , např. EGM2008 s 2160(2190).

# Náplň přednášky

## Pro metodu symetrií

- Elipsoidální reprezentace
- Cíl: **optimalizace výpočtu speciálních funkcí** (rychlost, přesnost, jednoduchost algoritmu) pro  $N \leq 3000$  jako např. EGM2008
- Namísto Legendreových funkcí 2. druhu použijeme Jekeliho renormalizaci

## Pro obecné řešení MNČ

- Sférická reprezentace
- Cíl: **návrh lineárního modelu** pro výpočet  $\bar{C}_{n,m}, \bar{S}_{n,m}$  do  $N \sim 250$  odpovídající např. modelů z GOCE, GRACE
- Různá data, obecně distribuovaná a různě orientovaná
- Namísto standardních rovnic využijeme Hotineho rovnice
- S nimi stanovíme rotované rovnice pozorování

## Náplň přednášky

### Pro metodu symetrií

- Elipsoidální reprezentace
- Cíl: **optimalizace výpočtu speciálních funkcí** (rychlost, přesnost, jednoduchost algoritmu) pro  $N \leq 3000$  jako např. EGM2008
- Namísto Legendreových funkcí 2. druhu použijeme Jekeliho renormalizaci

### Pro obecné řešení MNČ

- Sférická reprezentace
- Cíl: **návrh lineárního modelu** pro výpočet  $\bar{C}_{n,m}, \bar{S}_{n,m}$  do  $N \sim 250$  odpovídající např. modelů z GOCE, GRACE
- Různá data, obecně distribuovaná a různě orientovaná
- Namísto standardních rovnic využijeme Hotineho rovnice
- S nimi stanovíme rotované rovnice pozorování

## **A) Elipsoidální reprezentace - optimalizace výpočtu Legendreových funkcí druhého druhu v rámci Jekeliho renormalizace**

## Elipsoidální reprezentace $V$

Řešíme  $\Delta V = 0$  v elip. souřadnicích  $\{u, \vartheta, \lambda\}$ , v níž je tato rovnice separabilní. Výsledkem je:

$$V = \frac{GM}{a} \sum_{n,m} \frac{Q_{nm}(\frac{u}{E})}{Q_{nm}(\frac{b}{E})} (\bar{C}_{nm}^e \cos m\lambda + \bar{S}_{nm}^e \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta)$$

kde  $Q_{nm}(\frac{u}{E})$  jsou ALF druhého druhu. V praxi ovšem „nesbíráme“  $V$ , ale obvykle některé jeho derivace:

$$V_x^e = -\frac{1}{L} V_\vartheta$$

$$V_y^e = -\frac{1}{v \sin \vartheta} V_\lambda$$

$$V_z^e = \frac{v}{L} V_u$$

$$V_{xx}^e = \frac{uv^2}{L^4} V_{uu} + \frac{1}{L^2} V_{\vartheta\vartheta} + \frac{E^2 \cos \vartheta \sin \vartheta}{L^4} V_\vartheta$$

$$V_{yy}^e = \frac{u}{L^2} V_{uu} + \frac{1}{v^2 \sin^2 \vartheta} V_{\lambda\lambda} + \frac{\cot \vartheta}{L^2} V_\vartheta$$

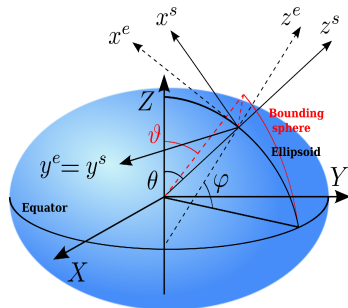
$$V_{zz}^e = \frac{v^2}{L^2} V_{uu} - \frac{uE^2 \sin^2 \vartheta}{L^4} V_{uu} - \frac{E^2 \cos \vartheta \sin \vartheta}{L^4} V_\vartheta$$

$$V_{xy}^e = \frac{1}{vL \sin \vartheta} V_{\vartheta\lambda} - \frac{\cot \vartheta}{vL \sin \vartheta} V_\lambda$$

$$V_{xz}^e = \frac{uv}{L^4} V_\vartheta - \frac{v}{L^2} V_{u\vartheta} - \frac{vE^2 \cos \vartheta \sin \vartheta}{L^4} V_u$$

$$V_{yz}^e = \frac{u}{Lv^2 \sin \vartheta} V_\lambda + \frac{1}{L \sin \vartheta} V_{u\lambda}$$

kde  $v = \sqrt{u^2 + E^2}$  and  $L = \sqrt{u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta}$



**EFF** - rovníková soustava  $\{X, Y, Z\}$

**LNOFs** - sférická, lokální, severně orientovaná soustava  $\{x_s, y_s, z_s\}$

**LNOFe** - elipsoidická, lokální, severně orientovaná soustava  $\{x_e, y_e, z_e\}$

# Výpočet přidružených Legendreových funkcí 2. druhu

- **Rekurentní vzorce**
- Zjednodušení - „perturbative approach“
- Hypergeometrická formulace
  - Počítáme celé hodnoty  $Q_{n,m}$
  - Počítáme zlomky  $\frac{Q_{nm}(\frac{u}{E})}{Q_{nm}(\frac{b}{E})}$
  - Renormalizujeme  $Q_{n,m}$  a pak teprve počítáme (Jekeliho renormalizace)

Jekeliho funkce byla původně určena pro konverze mezi sfér. a elipsoidálními Stokesovými parametry, zavádí se v LDR:  $(u^2 + E^2) \bar{Q}_{n,m}^2 + 2u\bar{Q}_{n,m}^1 - \left[ n(n+1) - \frac{m^2 E^2}{u^2 + E^2} \right] \bar{Q}_{n,m}^0 = 0$ , což ovšem můžeme vynásobit libovolnou funkcí (subst.  $z = i \frac{u}{E}$ ):

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left( \frac{u}{E} \right) = \frac{\left( \frac{R}{E} \right)^{n+1} i^{n+1} (2n+1)!}{2^n n!} \sqrt{\frac{\epsilon_m}{(2n+1)(n-m)!(n+m)!}} \bar{Q}_{n,m}(z),$$

$$\bar{Q}_{n,m}(z) = (-1)^m \frac{2^n n! (n+m)!}{(2n+1)!} \frac{(z^2 - 1)^{\frac{m}{2}}}{z^{n+m+1}} \underbrace{{}_2F_1 \left( \frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, \frac{1}{z^2} \right)}_{\text{Gauss. hyper. funkce}} \underbrace{\sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{\epsilon_m (n+m)!}}}_{\text{Norma}},$$

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left( \frac{u}{E} \right) = \left( 1 + \frac{E^2}{u^2} \right)^{\frac{m}{2}} \left( \frac{R}{u} \right)^{n+1} {}_2F_1 \left( \frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, -\frac{E^2}{u^2} \right).$$

# Výpočet přidružených Legendreových funkcí 2. druhu

- Rekurentní vzorce
- Zjednodušení - „perturbative approach“
- Hypergeometrická formulace
  - Počítáme celé hodnoty  $Q_{n,m}$
  - Počítáme zlomky  $\frac{Q_{nm}(\frac{u}{E})}{Q_{nm}(\frac{b}{E})}$
  - Renormalizujeme  $Q_{n,m}$  a pak teprve počítáme (Jekeliho renormalizace)

Jekeliho funkce byla původně určena pro konverze mezi sfér. a elipsoidálními Stokesovými parametry, zavádí se v LDR:  $(u^2 + E^2) \bar{Q}_{n,m}^2 + 2u\bar{Q}_{n,m}^1 - \left[ n(n+1) - \frac{m^2 E^2}{u^2 + E^2} \right] \bar{Q}_{n,m}^0 = 0$ , což ovšem můžeme vynásobit libovolnou funkcí (subst.  $z = i \frac{u}{E}$ ):

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left( \frac{u}{E} \right) = \frac{\left( \frac{R}{E} \right)^{n+1} i^{n+1} (2n+1)!}{2^n n!} \sqrt{\frac{\epsilon_m}{(2n+1)(n-m)!(n+m)!}} \bar{Q}_{n,m}(z),$$

$$\bar{Q}_{n,m}(z) = (-1)^m \frac{2^n n! (n+m)!}{(2n+1)!} \frac{(z^2 - 1)^{\frac{m}{2}}}{z^{n+m+1}} \underbrace{{}_2F_1 \left( \frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, \frac{1}{z^2} \right)}_{\text{Gauss. hyper. funkce}} \underbrace{\sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{\epsilon_m (n+m)!}}}_{\text{Norma}},$$

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left( \frac{u}{E} \right) = \left( 1 + \frac{E^2}{u^2} \right)^{\frac{m}{2}} \left( \frac{R}{u} \right)^{n+1} {}_2F_1 \left( \frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, -\frac{E^2}{u^2} \right).$$

# Výpočet přidružených Legendreových funkcí 2. druhu

- Rekurentní vzorce
- Zjednodušení - „perturbative approach“
- **Hypergeometrická formulace**
  - Počítáme celé hodnoty  $Q_{n,m}$
  - Počítáme zlomky  $\frac{Q_{nm}(\frac{u}{E})}{Q_{nm}(\frac{b}{E})}$
  - Renormalizujeme  $Q_{n,m}$  a pak teprve počítáme (Jekeliho renormalizace)

Jekeliho funkce byla původně určena pro konverze mezi sfér. a elipsoidálními Stokesovými parametry, zavádí se v LDR:  $(u^2 + E^2) \bar{Q}_{n,m}^2 + 2u\bar{Q}_{n,m}^1 - \left[ n(n+1) - \frac{m^2 E^2}{u^2 + E^2} \right] \bar{Q}_{n,m}^0 = 0$ , což ovšem můžeme vynásobit libovolnou funkcí (subst.  $z = i\frac{u}{E}$ ):

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left( \frac{u}{E} \right) = \frac{\left( \frac{R}{E} \right)^{n+1} i^{n+1} (2n+1)!}{2^n n!} \sqrt{\frac{\epsilon_m}{(2n+1)(n-m)!(n+m)!}} \bar{Q}_{n,m}(z),$$

$$\bar{Q}_{n,m}(z) = (-1)^m \frac{2^n n!(n+m)!}{(2n+1)!} \frac{(z^2 - 1)^{\frac{m}{2}}}{z^{n+m+1}} \underbrace{{}_2F_1 \left( \frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, \frac{1}{z^2} \right)}_{\text{Gauss. hyper. funkce}} \underbrace{\sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{\epsilon_m (n+m)!}}}_{\text{Norma}},$$

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left( \frac{u}{E} \right) = \left( 1 + \frac{E^2}{u^2} \right)^{\frac{m}{2}} \left( \frac{R}{u} \right)^{n+1} {}_2F_1 \left( \frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, -\frac{E^2}{u^2} \right).$$

# Výpočet přidružených Legendreových funkcí 2. druhu

- Rekurentní vzorce
- Zjednodušení - „perturbative approach“
- Hypergeometrická formulace
  - Počítáme celé hodnoty  $Q_{n,m}$
  - Počítáme zlomky  $\frac{Q_{nm}(\frac{u}{E})}{Q_{nm}(\frac{b}{E})}$
  - Renormalizujeme  $Q_{n,m}$  a pak teprve počítáme (Jekeliho renormalizace)

Jekeliho funkce byla původně určena pro konverze mezi sfér. a elipsoidálními Stokesovými parametry, zavádí se v LDR:  $(u^2 + E^2) \bar{Q}_{n,m}^2 + 2u\bar{Q}_{n,m}^1 - \left[ n(n+1) - \frac{m^2 E^2}{u^2 + E^2} \right] \bar{Q}_{n,m}^0 = 0$ , což ovšem můžeme vynásobit libovolnou funkcí (subst.  $z = i \frac{u}{E}$ ):

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left( \frac{u}{E} \right) = \frac{\left( \frac{R}{E} \right)^{n+1} i^{n+1} (2n+1)!}{2^n n!} \sqrt{\frac{\epsilon_m}{(2n+1)(n-m)!(n+m)!}} \bar{Q}_{n,m}(z),$$

$$\bar{Q}_{n,m}(z) = (-1)^m \frac{2^n n! (n+m)!}{(2n+1)!} \frac{(z^2 - 1)^{\frac{m}{2}}}{z^{n+m+1}} \underbrace{{}_2F_1 \left( \frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, \frac{1}{z^2} \right)}_{\text{Gauss. hyper. funkce}} \underbrace{\sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{\epsilon_m (n+m)!}}}_{\text{Norma}},$$

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left( \frac{u}{E} \right) = \left( 1 + \frac{E^2}{u^2} \right)^{\frac{m}{2}} \left( \frac{R}{u} \right)^{n+1} {}_2F_1 \left( \frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, -\frac{E^2}{u^2} \right).$$

# Výpočet přidružených Legendreových funkcí 2. druhu

- Rekurentní vzorce
- Zjednodušení - „perturbative approach“
- Hypergeometrická formulace
  - Počítáme celé hodnoty  $Q_{n,m}$
  - Počítáme zlomky  $\frac{Q_{nm}(\frac{u}{E})}{Q_{nm}(\frac{b}{E})}$
  - Renormalizujeme  $Q_{n,m}$  a pak teprve počítáme (Jekeliho renormalizace)

Jekeliho funkce byla původně určena pro konverze mezi sfér. a elipsoidálními Stokesovými parametry, zavádí se v LDR:  $(u^2 + E^2) \bar{Q}_{n,m}^2 + 2u\bar{Q}_{n,m}^1 - \left[ n(n+1) - \frac{m^2 E^2}{u^2 + E^2} \right] \bar{Q}_{n,m}^0 = 0$ , což ovšem můžeme vynásobit libovolnou funkcí (subst.  $z = i \frac{u}{E}$ ):

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left( \frac{u}{E} \right) = \frac{\left( \frac{R}{E} \right)^{n+1} i^{n+1} (2n+1)!}{2^n n!} \sqrt{\frac{\epsilon_m}{(2n+1)(n-m)!(n+m)!}} \bar{Q}_{n,m}(z),$$

$$\bar{Q}_{n,m}(z) = (-1)^m \frac{2^n n!(n+m)!}{(2n+1)!} \frac{(z^2 - 1)^{\frac{m}{2}}}{z^{n+m+1}} \underbrace{{}_2F_1 \left( \frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, \frac{1}{z^2} \right)}_{\text{Gauss. hyper. funkce}} \underbrace{\sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{\epsilon_m (n+m)!}}}_{\text{Norma}},$$

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left( \frac{u}{E} \right) = \left( 1 + \frac{E^2}{u^2} \right)^{\frac{m}{2}} \left( \frac{R}{u} \right)^{n+1} {}_2F_1 \left( \frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, -\frac{E^2}{u^2} \right).$$

# Výpočet přidružených Legendreových funkcí 2. druhu

- Rekurentní vzorce
- Zjednodušení - „perturbative approach“
- Hypergeometrická formulace
  - Počítáme celé hodnoty  $Q_{n,m}$
  - Počítáme zlomky  $\frac{Q_{nm}(\frac{u}{E})}{Q_{nm}(\frac{b}{E})}$
  - Renormalizujeme  $Q_{n,m}$  a pak teprve počítáme (Jekeliho renormalizace)

Jekeliho funkce byla původně určena pro konverze mezi sfér. a elipsoidálními Stokesovými parametry, zavádí se v LDR:  $(u^2 + E^2) \bar{Q}_{n,m}^2 + 2u\bar{Q}_{n,m}^1 - \left[ n(n+1) - \frac{m^2 E^2}{u^2 + E^2} \right] \bar{Q}_{n,m}^0 = 0$ , což ovšem můžeme vynásobit libovolnou funkcí (subst.  $z = i \frac{u}{E}$ ):

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left( \frac{u}{E} \right) = \frac{\left( \frac{R}{E} \right)^{n+1} i^{n+1} (2n+1)!}{2^n n!} \sqrt{\frac{\epsilon_m}{(2n+1)(n-m)!(n+m)!}} \bar{Q}_{n,m}(z),$$

$$\bar{Q}_{n,m}(z) = (-1)^m \frac{2^n n!(n+m)!}{(2n+1)!} \frac{(z^2 - 1)^{\frac{m}{2}}}{z^{n+m+1}} \underbrace{{}_2F_1 \left( \frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, \frac{1}{z^2} \right)}_{\text{Gauss. hyper. funkce}} \underbrace{\sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{\epsilon_m (n+m)!}}}_{\text{Norma}},$$

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left( \frac{u}{E} \right) = \left( 1 + \frac{E^2}{u^2} \right)^{\frac{m}{2}} \left( \frac{R}{u} \right)^{n+1} {}_2F_1 \left( \frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, -\frac{E^2}{u^2} \right).$$

# Výpočet přidružených Legendreových funkcí 2. druhu

- Rekurentní vzorce
- Zjednodušení - „perturbative approach“
- Hypergeometrická formulace
  - Počítáme celé hodnoty  $Q_{n,m}$
  - Počítáme zlomky  $\frac{Q_{nm}(\frac{u}{E})}{Q_{nm}(\frac{b}{E})}$
  - Renormalizujeme  $Q_{n,m}$  a pak teprve počítáme (Jekeliho renormalizace)

Jekeliho funkce byla původně určena pro konverze mezi sfér. a elipsoidálními Stokesovými parametry, zavádí se v LDR:  $(u^2 + E^2) \bar{Q}_{n,m}^2 + 2u\bar{Q}_{n,m}^1 - \left[ n(n+1) - \frac{m^2 E^2}{u^2 + E^2} \right] \bar{Q}_{n,m}^0 = 0$ , což ovšem můžeme vynásobit libovolnou funkcí (subst.  $z = i \frac{u}{E}$ ):

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left( \frac{u}{E} \right) = \frac{\left( \frac{R}{E} \right)^{n+1} i^{n+1} (2n+1)!}{2^n n!} \sqrt{\frac{\epsilon_m}{(2n+1)(n-m)!(n+m)!}} \bar{Q}_{n,m}(z),$$

$$\bar{Q}_{n,m}(z) = (-1)^m \frac{2^n n! (n+m)!}{(2n+1)!} \frac{(z^2 - 1)^{\frac{m}{2}}}{z^{n+m+1}} \underbrace{{}_2F_1 \left( \frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, \frac{1}{z^2} \right)}_{\text{Gauss. hyper. funkce}} \underbrace{\sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{\epsilon_m (n+m)!}}}_{\text{Norma}},$$

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left( \frac{u}{E} \right) = \left( 1 + \frac{E^2}{u^2} \right)^{\frac{m}{2}} \left( \frac{R}{u} \right)^{n+1} {}_2F_1 \left( \frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, -\frac{E^2}{u^2} \right).$$

# Výpočet přidružených Legendreových funkcí 2. druhu

- Rekurentní vzorce
- Zjednodušení - „perturbative approach“
- Hypergeometrická formulace
  - Počítáme celé hodnoty  $Q_{n,m}$
  - Počítáme zlomky  $\frac{Q_{nm}(\frac{u}{E})}{Q_{nm}(\frac{b}{E})}$
  - Renormalizujeme  $Q_{n,m}$  a pak teprve počítáme (Jekeliho renormalizace)

Jekeliho funkce byla původně určena pro konverze mezi sfér. a elipsoidálními Stokesovými parametry, zavádí se v LDR:  $(u^2 + E^2) \bar{Q}_{n,m}^2 + 2u\bar{Q}_{n,m}^1 - \left[ n(n+1) - \frac{m^2 E^2}{u^2 + E^2} \right] \bar{Q}_{n,m}^0 = 0$ , což ovšem můžeme vynásobit libovolnou funkcí (subst.  $z = i \frac{u}{E}$ ):

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left( \frac{u}{E} \right) = \frac{\left( \frac{R}{E} \right)^{n+1} i^{n+1} (2n+1)!}{2^n n!} \sqrt{\frac{\epsilon_m}{(2n+1)(n-m)!(n+m)!}} \bar{Q}_{n,m}(z),$$

$$\bar{Q}_{n,m}(z) = (-1)^m \frac{2^n n!(n+m)!}{(2n+1)!} \frac{(z^2 - 1)^{\frac{m}{2}}}{z^{n+m+1}} \underbrace{{}_2F_1 \left( \frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, \frac{1}{z^2} \right)}_{\text{Gauss. hyper. funkce}} \underbrace{\sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{\epsilon_m (n+m)!}}}_{\text{Norma}},$$

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left( \frac{u}{E} \right) = \left( 1 + \frac{E^2}{u^2} \right)^{\frac{m}{2}} \left( \frac{R}{u} \right)^{n+1} {}_2F_1 \left( \frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, -\frac{E^2}{u^2} \right).$$

# Výpočet přidružených Legendreových funkcí 2. druhu

- Rekurentní vzorce
- Zjednodušení - „perturbative approach“
- Hypergeometrická formulace
  - Počítáme celé hodnoty  $Q_{n,m}$
  - Počítáme zlomky  $\frac{Q_{nm}(\frac{u}{E})}{Q_{nm}(\frac{b}{E})}$
  - Renormalizujeme  $Q_{n,m}$  a pak teprve počítáme (Jekeliho renormalizace)

Jekeliho funkce byla původně určena pro konverze mezi sfér. a elipsoidálními Stokesovými parametry, zavádí se v LDR:  $(u^2 + E^2) \bar{Q}_{n,m}^2 + 2u\bar{Q}_{n,m}^1 - \left[ n(n+1) - \frac{m^2 E^2}{u^2 + E^2} \right] \bar{Q}_{n,m}^0 = 0$ , což ovšem můžeme vynásobit libovolnou funkcí (subst.  $z = i\frac{u}{E}$ ):

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left( \frac{u}{E} \right) = \frac{\left( \frac{R}{E} \right)^{n+1} i^{n+1} (2n+1)!}{2^n n!} \sqrt{\frac{\epsilon_m}{(2n+1)(n-m)!(n+m)!}} \bar{Q}_{n,m}(z),$$

$$\bar{Q}_{n,m}(z) = (-1)^m \frac{2^n n!(n+m)!}{(2n+1)!} \frac{(z^2 - 1)^{\frac{m}{2}}}{z^{n+m+1}} \underbrace{{}_2F_1 \left( \frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, \frac{1}{z^2} \right)}_{\text{Gauss. hyper. funkce}} \underbrace{\sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{\epsilon_m (n+m)!}}}_{\text{Norma}},$$

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left( \frac{u}{E} \right) = \left( 1 + \frac{E^2}{u^2} \right)^{\frac{m}{2}} \left( \frac{R}{u} \right)^{n+1} {}_2F_1 \left( \frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, -\frac{E^2}{u^2} \right).$$

# Výpočet přidružených Legendreových funkcí 2. druhu

- Rekurentní vzorce
- Zjednodušení - „perturbative approach“
- Hypergeometrická formulace
  - Počítáme celé hodnoty  $Q_{n,m}$
  - Počítáme zlomky  $\frac{Q_{nm}(\frac{u}{E})}{Q_{nm}(\frac{b}{E})}$
  - Renormalizujeme  $Q_{n,m}$  a pak teprve počítáme (Jekeliho renormalizace)

Jekeliho funkce byla původně určena pro konverze mezi sfér. a elipsoidálními Stokesovými parametry, zavádí se v LDR:  $(u^2 + E^2) \bar{Q}_{n,m}^2 + 2u\bar{Q}_{n,m}^1 - \left[ n(n+1) - \frac{m^2 E^2}{u^2 + E^2} \right] \bar{Q}_{n,m}^0 = 0$ , což ovšem můžeme vynásobit libovolnou funkcí (subst.  $z = i \frac{u}{E}$ ):

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left( \frac{u}{E} \right) = \frac{\left( \frac{R}{E} \right)^{n+1} i^{n+1} (2n+1)!}{2^n n!} \sqrt{\frac{\epsilon_m}{(2n+1)(n-m)!(n+m)!}} \bar{Q}_{n,m}(z),$$

$$\bar{Q}_{n,m}(z) = (-1)^m \frac{2^n n!(n+m)!}{(2n+1)!} \frac{(z^2 - 1)^{\frac{m}{2}}}{z^{n+m+1}} \underbrace{{}_2F_1 \left( \frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, \frac{1}{z^2} \right)}_{\text{Gauss. hyper. funkce}} \underbrace{\sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{\epsilon_m (n+m)!}}}_{\text{Norma}},$$

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left( \frac{u}{E} \right) = \left( 1 + \frac{E^2}{u^2} \right)^{\frac{m}{2}} \left( \frac{R}{u} \right)^{n+1} {}_2F_1 \left( \frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, -\frac{E^2}{u^2} \right).$$

## Gaussova hypergeometrická funkce

V předcházející rovnici je použita hypergeometrická funkce  ${}_2F_1$ , která je definována

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k} \frac{\delta^k}{k!},$$

kde  $(x)_k = \frac{(x+k-1)!}{(x-1)!}$ . Výpočetní optimalizace  ${}_2F_1$  spočívá v zavedení povolené transformace, která by pomohla tuto nekonečnou řadu dovést rychleji ke (přijatelné) konvergenci  $\Rightarrow$  transformace v podstatě mění poměry ve zlomku (např. zvýšení  $(\gamma)_k$  urychlí konvergenci). Např. transformace

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1 - \delta)^{\gamma - \alpha - \beta} {}_2F_1(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma, \delta),$$

poskytuje z původní Jekeliho funkce  $\bar{S}_{n,m}$

$$* \bar{S}_{n,m}^0 \left( \frac{u}{E} \right) = \left( 1 + \frac{E^2}{u^2} \right)^{-\frac{m}{2}} \left( \frac{R}{u} \right)^{n+1} {}_2F_1 \left( \frac{n-m+2}{2}, \frac{n-m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, -\frac{E^2}{u^2} \right),$$

kde jsme výrazně snížili  $\alpha, \beta$ .

$\Rightarrow$  Rychlejší výpočty, snížení vlivu zaokrouhlování

$\Rightarrow$  Derivací původní nebo optimalizované funkce  $\bar{S}_{n,m}$  podle  $u$  získáme  $\Rightarrow \frac{\partial \bar{S}_{n,m}}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial^2 \bar{S}_{n,m}}{\partial u^2} \Rightarrow$  výpočet  $V_i, V_{i,j}$ .

## Gaussova hypergeometrická funkce

V předcházející rovnici je použita hypergeometrická funkce  ${}_2F_1$ , která je definována

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k} \frac{\delta^k}{k!},$$

kde  $(x)_k = \frac{(x+k-1)!}{(x-1)!}$ . Výpočetní optimalizace  ${}_2F_1$  spočívá v zavedení povolené transformace, která by pomohla tuto nekonečnou řadu dovést rychleji ke (přijatelné) konvergenci  $\Rightarrow$  transformace v podstatě mění poměry ve zlomku (např. zvýšení  $(\gamma)_k$  urychlí konvergenci). Např. transformace

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1 - \delta)^{\gamma - \alpha - \beta} {}_2F_1(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma, \delta),$$

poskytuje z původní Jekeliho funkce  $\bar{S}_{n,m}$

$$* \bar{S}_{n,m}^0 \left( \frac{u}{E} \right) = \left( 1 + \frac{E^2}{u^2} \right)^{-\frac{m}{2}} \left( \frac{R}{u} \right)^{n+1} {}_2F_1 \left( \frac{n-m+2}{2}, \frac{n-m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, -\frac{E^2}{u^2} \right),$$

kde jsme výrazně snížili  $\alpha, \beta$ .

$\Rightarrow$  Rychlejší výpočty, snížení vlivu zaokrouhlování

$\Rightarrow$  Derivací původní nebo optimalizované funkce  $\bar{S}_{n,m}$  podle  $u$  získáme  $\Rightarrow \frac{\partial \bar{S}_{n,m}}{\partial u}$ ,

$\frac{\partial^2 \bar{S}_{n,m}}{\partial u^2} \Rightarrow$  výpočet  $V_i, V_{i,j}$ .

## Gaussova hypergeometrická funkce

V předcházející rovnici je použita hypergeometrická funkce  ${}_2F_1$ , která je definována

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k} \frac{\delta^k}{k!},$$

kde  $(x)_k = \frac{(x+k-1)!}{(x-1)!}$ . Výpočetní optimalizace  ${}_2F_1$  spočívá v zavedení povolené transformace, která by pomohla tuto nekonečnou řadu dovést rychleji ke (přijatelné) konvergenci  $\Rightarrow$  transformace v podstatě mění poměry ve zlomku (např. zvýšení  $(\gamma)_k$  urychlí konvergenci). Např. transformace

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1 - \delta)^{\gamma - \alpha - \beta} {}_2F_1(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma, \delta),$$

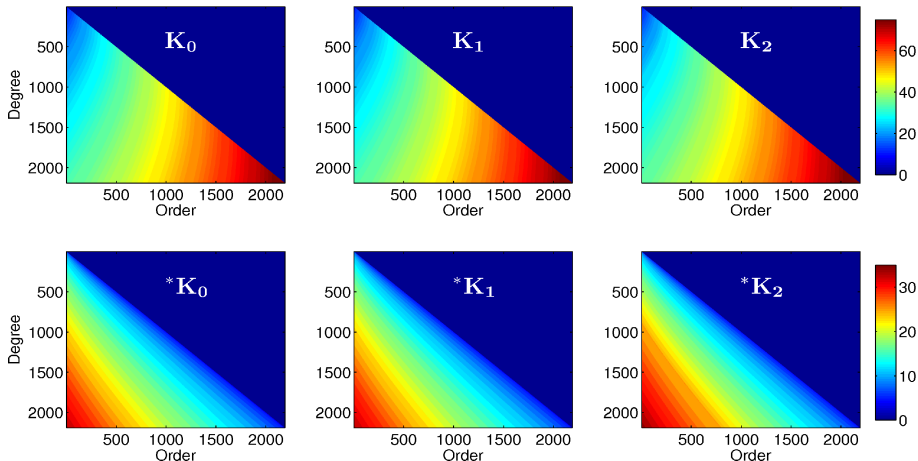
poskytuje z původní Jekeliho funkce  $\bar{S}_{n,m}$

$$* \bar{S}_{n,m}^0 \left( \frac{u}{E} \right) = \left( 1 + \frac{E^2}{u^2} \right)^{-\frac{m}{2}} \left( \frac{R}{u} \right)^{n+1} {}_2F_1 \left( \frac{n-m+2}{2}, \frac{n-m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, -\frac{E^2}{u^2} \right),$$

kde jsme výrazně snížili  $\alpha, \beta$ .

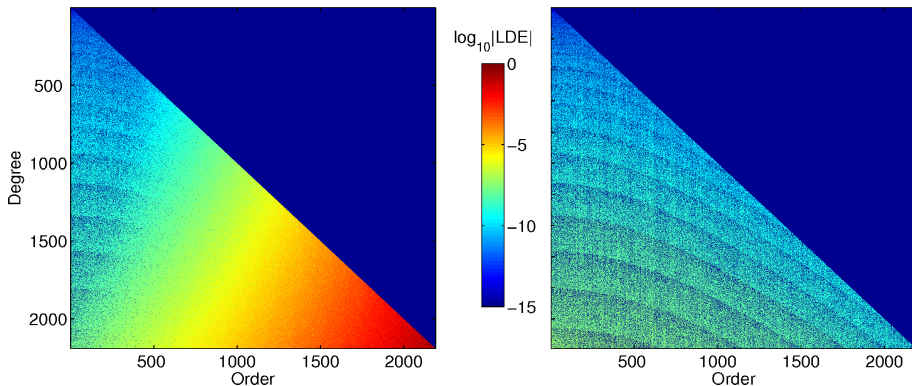
$\Rightarrow$  Rychlejší výpočty, snížení vlivu zaokrouhlování

$\Rightarrow$  Derivací původní nebo optimalizované funkce  $\bar{S}_{n,m}$  podle  $u$  získáme  $\Rightarrow \frac{\partial \bar{S}_{n,m}}{\partial u}$ ,  
 $\frac{\partial^2 \bar{S}_{n,m}}{\partial u^2} \Rightarrow$  výpočet  $V_i, V_{i,j}$ .



Počet členů pro konvergenci při relativní přesnosti  $10^{-16}$ . Původní (horní řádek) vs. optimalizované (dolní řádek)

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \sum_{k=0}^K \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k} \frac{\delta^k}{k!},$$



Dosazení do Legendreovy diferenciální rovnice, vlevo původní vs. vpravo optimalizované

$$(u^2 + E^2) \bar{S}_{n,m}^2 + 2u\bar{S}_{n,m}^1 - \left[ n(n+1) - \frac{m^2 E^2}{u^2 + E^2} \right] \bar{S}_{n,m}^0 = 0$$

## Ověření konceptu - výpočet totožných funkcionalů s elipsoidálními a sférickými Stokesovými parametry

	$T$	$ \nabla T $	$T_{xx}^e$	$T_{yy}^e$	$T_{zz}^e$	$T_{xy}^e$	$T_{xz}^e$	$T_{yz}^e$
<b>Max</b>	15.9 (15.9)	15.9 (14.7)	16.0 (14.6)	15.9 (12.9)	15.9 (13.2)	16.0 (13.9)	15.9 (14.6)	16.0 (13.7)
<b>Min</b>	14.0 (11.5)	11.9 (8.3)	8.2 (5.8)	8.6 (4.4)	8.3 (4.6)	9.0 (5.4)	8.2 (5.1)	8.7 (5.0)
<b>RMS</b>	14.9 (12.8)	13.8 (10.4)	12.7 (10.3)	12.8 (9.9)	12.8 (9.2)	12.8 (9.5)	12.7 (9.8)	12.8 (9.0)

Počet shodných cifer mezi SHS ( $n_{max} = 2190$ ) and EHS ( $n_{max} = 2190 + 40$ ) ve střední Evropě ( $\varphi \in \langle 44, 55 \rangle$ ,  $\lambda \in \langle 5, 23 \rangle$  na gridu 5x5 min.). Tensor  $T_{ij}$  byl nejdříve rotován do LNOFe a pak porovnán. Počet shodných cifer je pro dvě čísla  $P_1, P_2$  dán jako  $\log_{10} \left( \frac{|P_1|}{|P_1 - P_2|} \right)$ . **V závorkách jsou výsledky pro původní (neoptimalizované) Jekeliho funkce.**

## **B) Koncept lineární modelu pro sférickou harmonickou analýzu MNČ**

## Charakteristika obecnějšího modelu SHA

- Možnost zpracování heterogenních dat (CHAMP, GRACE, GOCE, gravimetrie?)
- Rozdíl potenciálu, dráha družice  $\Rightarrow$  vektor gravitačního zrychlení, gradientometrie  $\Rightarrow V, V_i, V_{ij}$
- Nutno uvážit, že tíhová data mají různou orientaci v prostoru
- „Méně je více“ - minimalizace manipulace s originálními daty
- Hardwarové omezení - velké soustavy rovnic,  $n_{max} \leq 360$



Rovnice pozorování pro lineární model

$$\begin{array}{l}
 V_i(r, \theta, \lambda) = RV_i^{EFF}(r, \theta, \lambda) \\
 \underbrace{V_{ij}(r, \theta, \lambda)}_{\text{měření}} = \underbrace{R}_{\text{orientace}} \underbrace{V_{ij}^{EFF}(r, \theta, \lambda)}_{\text{rovnice+poloha}} R^T
 \end{array}$$



## Charakteristika obecnějšího modelu SHA

- Možnost zpracování heterogenních dat (CHAMP, GRACE, GOCE, gravimetrie?)
- Rozdíl potenciálu, dráha družice  $\Rightarrow$  vektor gravitačního zrychlení, gradientometrie  $\Rightarrow V, V_i, V_{ij}$
- Nutno uvážit, že tíhová data mají různou orientaci v prostoru
- „Méně je více“ - minimalizace manipulace s originálními daty
- Hardwarové omezení - velké soustavy rovnic,  $n_{max} \leq 360$



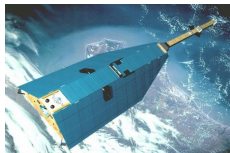
Rovnice pozorování pro lineární model

$$\begin{array}{l}
 V_i(r, \theta, \lambda) = RV_i^{EFF}(r, \theta, \lambda) \\
 \underbrace{V_{ij}(r, \theta, \lambda)}_{\text{měření}} = \underbrace{R}_{\text{orientace}} \underbrace{V_{ij}^{EFF}(r, \theta, \lambda)}_{\text{rovnice+poloha}} R^T
 \end{array}$$



## Charakteristika obecnějšího modelu SHA

- Možnost zpracování heterogenních dat (CHAMP, GRACE, GOCE, gravimetrie?)
- Rozdíl potenciálu, dráha družice  $\Rightarrow$  vektor gravitačního zrychlení, gradientometrie  $\Rightarrow V, V_i, V_{ij}$
- Nutno uvážit, že tíhová data mají různou orientaci v prostoru
- „Méně je více“ - minimalizace manipulace s originálními daty
- Hardwarové omezení - velké soustavy rovnic,  $n_{max} \leq 360$



Rovnice pozorování pro lineární model

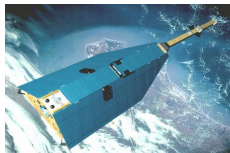
$$\underbrace{V_i(r, \theta, \lambda)}_{\text{měření}} = \underbrace{R}_{\text{orientace}} \underbrace{RV_i^{EFF}(r, \theta, \lambda)}_{\text{rovnice+poloha}} R^T$$

$$\underbrace{V_{ij}(r, \theta, \lambda)}_{\text{měření}} = \underbrace{R}_{\text{orientace}} \underbrace{V_{ij}^{EFF}(r, \theta, \lambda)}_{\text{rovnice+poloha}} R^T$$



## Charakteristika obecnějšího modelu SHA

- Možnost zpracování heterogenních dat (CHAMP, GRACE, GOCE, gravimetrie?)
- Rozdíl potenciálu, dráha družice  $\Rightarrow$  vektor gravitačního zrychlení, gradientometrie  $\Rightarrow V, V_i, V_{ij}$
- Nutno uvážit, že tíhová data mají různou orientaci v prostoru
- „Méně je více“ - minimalizace manipulace s originálními daty
- Hardwarové omezení - velké soustavy rovnic,  
 $n_{max} \leq 360$



Rovnice pozorování pro lineární model

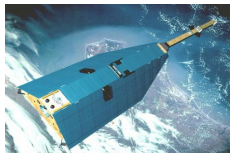
$$\underbrace{V_i(r, \theta, \lambda)}_{\text{měření}} = \underbrace{R}_{\text{orientace}} \underbrace{RV_i^{EFF}(r, \theta, \lambda)}_{\text{rovnice+poloha}} R^T$$

$$\underbrace{V_{ij}(r, \theta, \lambda)}_{\text{měření}} = \underbrace{R}_{\text{orientace}} \underbrace{V_{ij}^{EFF}(r, \theta, \lambda)}_{\text{rovnice+poloha}} R^T$$



## Charakteristika obecnějšího modelu SHA

- Možnost zpracování heterogenních dat (CHAMP, GRACE, GOCE, gravimetrie?)
- Rozdíl potenciálu, dráha družice  $\Rightarrow$  vektor gravitačního zrychlení, gradientometrie  $\Rightarrow V, V_i, V_{ij}$
- Nutno uvážit, že tíhová data mají různou orientaci v prostoru
- „Méně je více“ - minimalizace manipulace s originálními daty
- Hardwarové omezení - velké soustavy rovnic,  $n_{max} \leq 360$



Rovnice pozorování pro lineární model

$$\underbrace{V_i(r, \theta, \lambda)}_{\text{měření}} = \underbrace{R}_{\text{orientace}} \underbrace{RV_i^{EFF}(r, \theta, \lambda)}_{\text{rovnice+poloha}} R^T$$

$$\underbrace{V_{ij}(r, \theta, \lambda)}_{\text{měření}} = \underbrace{R}_{\text{orientace}} \underbrace{V_{ij}^{EFF}(r, \theta, \lambda)}_{\text{rovnice+poloha}} R^T$$



## Charakteristika obecnějšího modelu SHA

- Možnost zpracování heterogenních dat (CHAMP, GRACE, GOCE, gravimetrie?)
- Rozdíl potenciálu, dráha družice  $\Rightarrow$  vektor gravitačního zrychlení, gradientometrie  $\Rightarrow V, V_i, V_{ij}$
- Nutno uvážit, že tíhová data mají různou orientaci v prostoru
- „Méně je více“ - minimalizace manipulace s originálními daty
- Hardwarové omezení - velké soustavy rovnic,  $n_{max} \leq 360$



### Rovnice pozorování pro lineární model

$$\begin{array}{l}
 V_i(r, \theta, \lambda) = RV_i^{EFF}(r, \theta, \lambda) \\
 \underbrace{V_{ij}(r, \theta, \lambda)}_{\text{měření}} = \underbrace{R}_{\text{orientace}} \underbrace{V_{ij}^{EFF}(r, \theta, \lambda)}_{\text{rovnice+poloha}} R^T
 \end{array}$$



## Hotineho rovnice

Opět řešíme  $\Delta V = 0$ , ale ve sfér. souřadnicích  $\{r, \theta, \lambda\}$ . Pak standardně dostáváme:

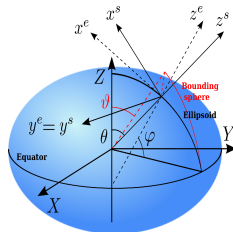
$$V = \frac{GM}{a} \sum_{n,m}^{\infty,n} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} (\bar{C}_{n,m} \cos m\lambda + \bar{S}_{n,m} \sin m\lambda) \bar{P}_{n,m},$$

kde  $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$  jsou hledané sférické Stokesovy parametry. Pro kartézské derivace  $V$  máme obdobné vztahy jako u elipsoidické reprezentace, my zde teď použijeme ty, které odvodil Martin Hotine v soustavě EFF (také Cunningham):

$$V_i = \frac{GM}{a^2} \sum_{n,m}^{\infty,n+1} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} (\bar{C}_{n+1,m}^i \cos m\lambda + \bar{S}_{n+1,m}^i \sin m\lambda) \bar{P}_{n+1,m}$$

$$V_{ij} = \frac{GM}{a^3} \sum_{n,m}^{\infty,n+2} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+3} (\bar{C}_{n+2,m}^{ij} \cos m\lambda + \bar{S}_{n+2,m}^{ij} \sin m\lambda) \bar{P}_{n+2,m}$$

Parametry  $\bar{C}_{n+1,m}^i, \bar{S}_{n+1,m}^i, \bar{C}_{n+2,m}^{ij}, \bar{S}_{n+2,m}^{ij}$  **nejsou** „klasické“ Stokesovy parametry, ale jejich určité lineární kombinace, tzv. Hotineho koeficienty/parametry.



EFF -  $\{X, Y, Z\}$

LNOFs -  $\{x_s, y_s, z_s\}$

LNOFe -  $\{x_e, y_e, z_e\}$

## Hotineho rovnice

Např. Hotineho koeficienty pro  $V_{xx}$  vypadají takto:

$$m = 0 \begin{cases} \bar{C}_{n+2,0}^{xx} &= -\frac{1}{2}t_0\bar{C}_{n,0} + \frac{1}{4}t_2\bar{C}_{n,0+2} \\ \bar{S}_{n+2,0}^{xx} &= 0 \end{cases}$$

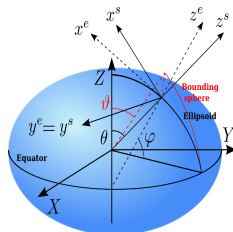
$$m = 1 \begin{cases} \bar{C}_{n+2,1}^{xx} &= -\frac{3}{4}t_0\bar{C}_{n,1} + \frac{1}{4}t_2\bar{C}_{n,1+2} \\ \bar{S}_{n+2,1}^{xx} &= -\frac{1}{4}t_0\bar{S}_{n,1} + \frac{1}{4}t_2\bar{S}_{n,1+2} \end{cases}$$

$$m = 2 \begin{cases} \bar{C}_{n+2,2}^{xx} &= \frac{1}{4}t_{m2}\bar{C}_{n,2-2} - \frac{1}{2}t_0\bar{C}_{n,2} + \frac{1}{4}t_2\bar{C}_{n,2+2} \\ \bar{S}_{n+2,2}^{xx} &= -\frac{1}{2}t_0\bar{S}_{n,2} + \frac{1}{4}t_2\bar{S}_{n,2+2} \end{cases}$$

$$m \geq 3 \begin{cases} \bar{C}_{n+2,m}^{xx} &= \frac{1}{4}t_{m2}\bar{C}_{n,m-2} - \frac{1}{2}t_0\bar{C}_{n,m} + \frac{1}{4}t_2\bar{C}_{n,m+2} \\ \bar{S}_{n+2,m}^{xx} &= \frac{1}{4}t_{m2}\bar{S}_{n,m-2} - \frac{1}{2}t_0\bar{S}_{n,m} + \frac{1}{4}t_2\bar{S}_{n,m+2} \end{cases}$$

kde  $t_0, t_{m2}, t_2$  jsou funkcí pouze  $n, m$  ( $\sim$  normalizační faktory).

$\Rightarrow$  Hotineho koeficienty jsou lineární funkcí Stokesových (geopotenciálních) parametrů



EFF -  $\{X, Y, Z\}$

LNOFs -  $\{x_s, y_s, z_s\}$

LNOFe -  $\{x_e, y_e, z_e\}$

## Rotované observační rovnice

Vyjdeme ze vztahu pro vektor gravitačního zrychlení či Eötvösův tensor v libovolné referenční soustavě:

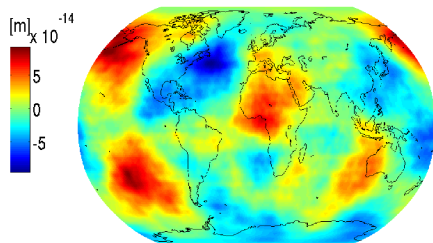
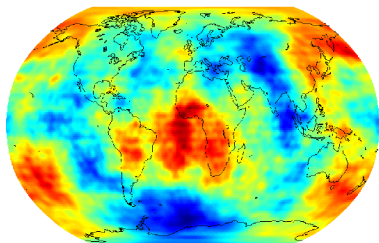
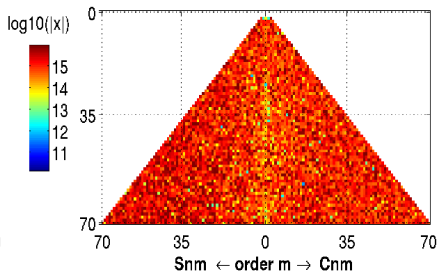
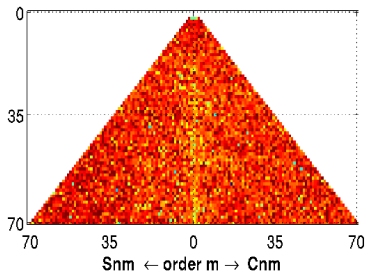
$$\begin{aligned} V_i(r, \theta, \lambda) &= RV_i^{EFF}(r, \theta, \lambda) \\ \underbrace{V_{ij}(r, \theta, \lambda)}_{\text{měření}} &= \underbrace{R}_{\text{orientace}} \underbrace{V_{ij}^{EFF}(r, \theta, \lambda)}_{\text{rovnice+poloha}} R^T \end{aligned}$$

Dosazením z Hotineho rovnic získáme rotované observační rovnice:

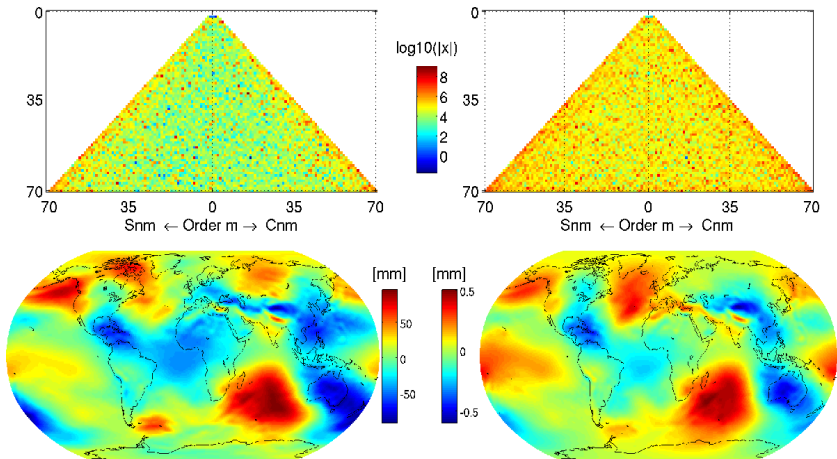
$$V_i = \frac{GM}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n+1} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} \bar{P}_{n+1,m} \left[ \cos m\lambda \left( r_1^i \bar{C}_{n+1,m}^x + r_2^i \bar{C}_{n+1,m}^y + r_3^i \bar{C}_{n+2,m}^z \right) + \sin m\lambda \left( r_1^i \bar{S}_{n+1,m}^x + r_2^i \bar{S}_{n+1,m}^y + r_3^i \bar{S}_{n+1,m}^z \right) \right],$$

$$\begin{aligned} V_{ij} &= \frac{GM}{a^3} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n+2} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+3} \bar{P}_{n+2,m} \left[ \cos m\lambda \left( s_1^{ij} \bar{C}_{n+2,m}^{xx} + s_2^{ij} \bar{C}_{n+2,m}^{yy} + s_3^{ij} \bar{C}_{n+2,m}^{zz} \right) \right. \\ &\quad + s_4^{ij} \bar{C}_{n+2,m}^{xy} + s_5^{ij} \bar{C}_{n+2,m}^{xz} + s_6^{ij} \bar{C}_{n+2,m}^{yz} + \sin m\lambda \left( s_1^{ij} \bar{S}_{n+2,m}^{xx} + s_2^{ij} \bar{S}_{n+2,m}^{yy} \right. \\ &\quad \left. \left. + s_3^{ij} \bar{S}_{n+2,m}^{zz} + s_4^{ij} \bar{S}_{n+2,m}^{xy} + s_5^{ij} \bar{S}_{n+2,m}^{xz} + s_6^{ij} \bar{S}_{n+2,m}^{yz} \right) \right]. \end{aligned}$$

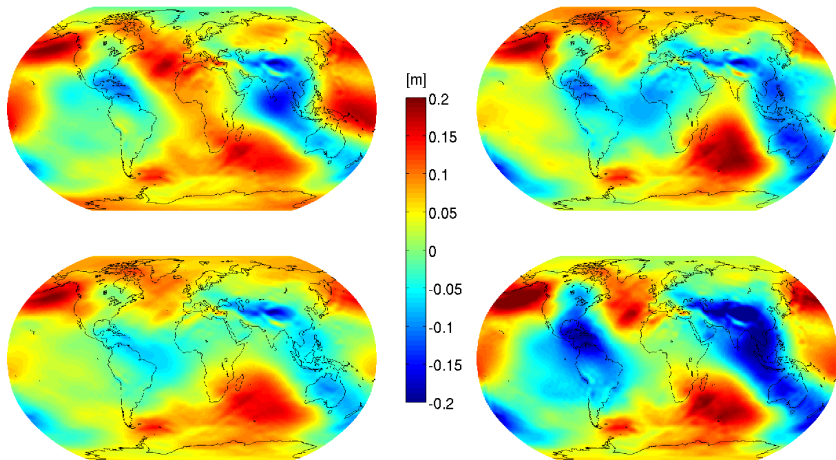
⇒ Zvýší se  $n_{max}$  rozvoje, žádné derivace  $\bar{P}_{n,m}$  a jednoduchá algebraická struktura



Ověření konceptu pro  $T_z, T_{zz}$ , EGM2008,  $n_{max} = 70$  (90 tisíc měření, 5000 neznámých)



Test SHA pomocí elipsoidické korekce  $\epsilon_h \approx e^2 \sin \varphi_s \cos \varphi_s \frac{1}{r} T_\varphi$ . Vlevo  $\text{SHA}(\delta g^e = T_z^e)$ , vpravo  $\text{SHA}(\delta g^s = T_z^e + \epsilon_h)$ , EGM2008,  $n_{max} = 70$  (90 tisíc měření, 5000 neznámých)



Výpočet vlivu normály na výšku geoidu pro různé kombinace dat (EGM2008,  $N = 70$ ) z EON = SHS ( $SHA^e(l) - SHA^s(l)$ ). Horní vlevo  $l = \{T_x^e, T_y^e\}$ , horní vpravo  $l = \{T_{zz}^e\}$ , dolní vlevo  $l = \{T_{xx}^e, T_{yy}^e\}$  a dolní vpravo  $l = \{T_{xy}^e, T_{xz}^e, T_{yz}^e\}$ .

## Výpočet elipsoidálních funkcí Jekeliho renormalizací

- Založeno na hypergeometrické definici  $\bar{Q}_{n,m} \Rightarrow \bar{S}_{n,m}$
- „2 mouchy...“ - funkce pro počítání s EHK a současně pro výpočet konverze koeficientů
- Velmi přesné pro optimalizované funkce (nejhůře 8 platných cifer pro  $n_{max} = 2190$ )
- Výpočet  $\bar{S}_{n,m}^0, \bar{S}_{n,m}^1, \bar{S}_{n,m}^3$  v řádu vteřin s (1.6GHz, 1CPU, Matlab).
- Hypergeometrická formulace  $\Rightarrow$  mnoho dalších možností pro optimalizaci.
- Význam EH zejména při EHA

## Přímá SHA s Hotineho rovnicemi

- Hotineho rovnice pracují v systému EFF
- Algebraicky jednoduché rotované observační rovnice  $\Rightarrow$  rychlost
- Heterogenní data  $V_i, V_{ij}$  v libovolné orientaci
- Nepotřebuje derivace  $\bar{P}_{n,m} \dots$  rychlost, menší vliv zaokrouhlování
- Hotine zavádí tzv. Hotineho koeficienty jako lineární kombinace Stokesových parametrů
- Pozor na překlepy v Hotineho „Mathematical Geodesy“ ve vztazích pro  $V_i, V_{ij}$  (jen některá vydání mají erratu)

## Výpočet elipsoidálních funkcí Jekeliho renormalizací

- Založeno na hypergeometrické definici  $\bar{Q}_{n,m} \Rightarrow \bar{S}_{n,m}$
- „2 mouchy...“ - funkce pro počítání s EHK a současně pro výpočet konverze koeficientů
- Velmi přesné pro optimalizované funkce (nejhůře 8 platných cifer pro  $n_{max} = 2190$ )
- Výpočet  $\bar{S}_{n,m}^0, \bar{S}_{n,m}^1, \bar{S}_{n,m}^3$  v řádu vteřin s (1.6GHz, 1CPU, Matlab).
- Hypergeometrická formulace  $\Rightarrow$  mnoho dalších možností pro optimalizaci.
- Význam EH zejména při EHA

## Přímá SHA s Hotineho rovnicemi

- Hotineho rovnice pracují v systému EFF
- Algebraicky jednoduché rotované observační rovnice  $\Rightarrow$  rychlost
- Heterogenní data  $V_i, V_{ij}$  v libovolné orientaci
- Nepotřebuje derivace  $\bar{P}_{n,m} \dots$  rychlost, menší vliv zaokrouhlování
- Hotine zavádí tzv. Hotineho koeficienty jako lineární kombinace Stokesových parametrů
- Pozor na překlepy v Hotineho „Mathematical Geodesy“ ve vztazích pro  $V_i, V_{ij}$  (jen některá vydání mají erratu)

## Výpočet elipsoidálních funkcí Jekeliho renormalizací

- Založeno na hypergeometrické definici  $\bar{Q}_{n,m} \Rightarrow \bar{S}_{n,m}$
- „2 mouchy...“ - funkce pro počítání s EHK a současně pro výpočet konverze koeficientů
- Velmi přesné pro optimalizované funkce (nejhůře 8 platných cifer pro  $n_{max} = 2190$ )
- Výpočet  $\bar{S}_{n,m}^0, \bar{S}_{n,m}^1, \bar{S}_{n,m}^3$  v řádu vteřin s (1.6GHz, 1CPU, Matlab).
- Hypergeometrická formulace  $\Rightarrow$  mnoho dalších možností pro optimalizaci.
- Význam EH zejména při EHA

## Přímá SHA s Hotineho rovnicemi

- Hotineho rovnice pracují v systému EFF
- Algebraicky jednoduché rotované observační rovnice  $\Rightarrow$  rychlost
- Heterogenní data  $V_i, V_{ij}$  v libovolné orientaci
- Nepotřebuje derivace  $\bar{P}_{n,m} \dots$  rychlost, menší vliv zaokrouhlování
- Hotine zavádí tzv. Hotineho koeficienty jako lineární kombinace Stokesových parametrů
- Pozor na překlady v Hotineho „Mathematical Geodesy“ ve vztazích pro  $V_i, V_{ij}$  (jen některá vydání mají erratu)

## Výpočet elipsoidálních funkcí Jekeliho renormalizací

- Založeno na hypergeometrické definici  $\bar{Q}_{n,m} \Rightarrow \bar{S}_{n,m}$
- „2 mouchy...“ - funkce pro počítání s EHK a současně pro výpočet konverze koeficientů
- Velmi přesné pro optimalizované funkce (nejhůře 8 platných cifer pro  $n_{max} = 2190$ )
- Výpočet  $\bar{S}_{n,m}^0, \bar{S}_{n,m}^1, \bar{S}_{n,m}^3$  v řádu vteřin s (1.6GHz, 1CPU, Matlab).
- Hypergeometrická formulace  $\Rightarrow$  mnoho dalších možností pro optimalizaci.
- Význam EH zejména při EHA

## Přímá SHA s Hotineho rovnicemi

- Hotineho rovnice pracují v systému EFF
- Algebraicky jednoduché rotované observační rovnice  $\Rightarrow$  rychlost
- Heterogenní data  $V_i, V_{ij}$  v libovolné orientaci
- Nepotřebuje derivace  $\bar{P}_{n,m} \dots$  rychlost, menší vliv zaokrouhlování
- Hotine zavádí tzv. Hotineho koeficienty jako lineární kombinace Stokesových parametrů
- Pozor na překlepy v Hotineho „Mathematical Geodesy“ ve vztazích pro  $V_i, V_{ij}$  (jen některá vydání mají erratu)

## Výpočet elipsoidálních funkcí Jekeliho renormalizací

- Založeno na hypergeometrické definici  $\bar{Q}_{n,m} \Rightarrow \bar{S}_{n,m}$
- „2 mouchy...“ - funkce pro počítání s EHK a současně pro výpočet konverze koeficientů
- Velmi přesné pro optimalizované funkce (nejhůře 8 platných cifer pro  $n_{max} = 2190$ )
- Výpočet  $\bar{S}_{n,m}^0, \bar{S}_{n,m}^1, \bar{S}_{n,m}^3$  v řádu vteřin s (1.6GHz, 1CPU, Matlab).
- Hypergeometrická formulace  $\Rightarrow$  mnoho dalších možností pro optimalizaci.
- Význam EH zejména při EHA

## Přímá SHA s Hotineho rovnicemi

- Hotineho rovnice pracují v systému EFF
- Algebraicky jednoduché rotované observační rovnice  $\Rightarrow$  rychlost
- Heterogenní data  $V_i, V_{ij}$  v libovolné orientaci
- Nepotřebuje derivace  $\bar{P}_{n,m} \dots$  rychlost, menší vliv zaokrouhlování
- Hotine zavádí tzv. Hotineho koeficienty jako lineární kombinace Stokesových parametrů
- Pozor na překlepy v Hotineho „Mathematical Geodesy“ ve vztazích pro  $V_i, V_{ij}$  (jen některá vydání mají erratu)

## Výpočet elipsoidálních funkcí Jekeliho renormalizací

- Založeno na hypergeometrické definici  $\bar{Q}_{n,m} \Rightarrow \bar{S}_{n,m}$
- „2 mouchy...“ - funkce pro počítání s EHK a současně pro výpočet konverze koeficientů
- Velmi přesné pro optimalizované funkce (nejhůře 8 platných cifer pro  $n_{max} = 2190$ )
- Výpočet  $\bar{S}_{n,m}^0, \bar{S}_{n,m}^1, \bar{S}_{n,m}^3$  v řádu vteřin s (1.6GHz, 1CPU, Matlab).
- Hypergeometrická formulace  $\Rightarrow$  mnoho dalších možností pro optimalizaci.
- Význam EH zejména při EHA

## Přímá SHA s Hotineho rovnicemi

- Hotineho rovnice pracují v systému EFF
- Algebraicky jednoduché rotované observační rovnice  $\Rightarrow$  rychlost
- Heterogenní data  $V_i, V_{ij}$  v libovolné orientaci
- Nepotřebuje derivace  $\bar{P}_{n,m} \dots$  rychlost, menší vliv zaokrouhlování
- Hotine zavádí tzv. Hotineho koeficienty jako lineární kombinace Stokesových parametrů
- Pozor na překlepy v Hotineho „Mathematical Geodesy“ ve vztazích pro  $V_i, V_{ij}$  (jen některá vydání mají erratu)

## Výpočet elipsoidálních funkcí Jekeliho renormalizací

- Založeno na hypergeometrické definici  $\bar{Q}_{n,m} \Rightarrow \bar{S}_{n,m}$
- „2 mouchy...“ - funkce pro počítání s EHK a současně pro výpočet konverze koeficientů
- Velmi přesné pro optimalizované funkce (nejhůře 8 platných cifer pro  $n_{max} = 2190$ )
- Výpočet  $\bar{S}_{n,m}^0, \bar{S}_{n,m}^1, \bar{S}_{n,m}^3$  v řádu vteřin s (1.6GHz, 1CPU, Matlab).
- Hypergeometrická formulace  $\Rightarrow$  mnoho dalších možností pro optimalizaci.
- Význam EH zejména při EHA

## Přímá SHA s Hotineho rovnicemi

- Hotineho rovnice pracují v systému EFF
- Algebraicky jednoduché rotované observační rovnice  $\Rightarrow$  rychlost
- Heterogenní data  $V_i, V_{ij}$  v libovolné orientaci
- Nepotřebuje derivace  $\bar{P}_{n,m} \dots$  rychlost, menší vliv zaokrouhlování
- Hotine zavádí tzv. Hotineho koeficienty jako lineární kombinace Stokesových parametrů
- Pozor na překlepy v Hotineho „Mathematical Geodesy“ ve vztazích pro  $V_i, V_{ij}$  (jen některá vydání mají erratu)

## Výpočet elipsoidálních funkcí Jekeliho renormalizací

- Založeno na hypergeometrické definici  $\bar{Q}_{n,m} \Rightarrow \bar{S}_{n,m}$
- „2 mouchy...“ - funkce pro počítání s EHK a současně pro výpočet konverze koeficientů
- Velmi přesné pro optimalizované funkce (nejhůře 8 platných cifer pro  $n_{max} = 2190$ )
- Výpočet  $\bar{S}_{n,m}^0, \bar{S}_{n,m}^1, \bar{S}_{n,m}^3$  v řádu vteřin s (1.6GHz, 1CPU, Matlab).
- Hypergeometrická formulace  $\Rightarrow$  mnoho dalších možností pro optimalizaci.
- Význam EH zejména při EHA

## Přímá SHA s Hotineho rovnicemi

- Hotineho rovnice pracují v systému EFF
- Algebraicky jednoduché rotované observační rovnice  $\Rightarrow$  rychlost
- Heterogenní data  $V_i, V_{ij}$  v libovolné orientaci
- Nepotřebuje derivace  $\bar{P}_{n,m} \dots$  rychlost, menší vliv zaokrouhlování
- Hotine zavádí tzv. Hotineho koeficienty jako lineární kombinace Stokesových parametrů
- Pozor na překlady v Hotineho „Mathematical Geodesy“ ve vztazích pro  $V_i, V_{ij}$  (jen některá vydání mají erratu)

## Výpočet elipsoidálních funkcí Jekeliho renormalizací

- Založeno na hypergeometrické definici  $\bar{Q}_{n,m} \Rightarrow \bar{S}_{n,m}$
- „2 mouchy...“ - funkce pro počítání s EHK a současně pro výpočet konverze koeficientů
- Velmi přesné pro optimalizované funkce (nejhůře 8 platných cifer pro  $n_{max} = 2190$ )
- Výpočet  $\bar{S}_{n,m}^0, \bar{S}_{n,m}^1, \bar{S}_{n,m}^3$  v řádu vteřin s (1.6GHz, 1CPU, Matlab).
- Hypergeometrická formulace  $\Rightarrow$  mnoho dalších možností pro optimalizaci.
- Význam EH zejména při EHA

## Přímá SHA s Hotineho rovnicemi

- Hotineho rovnice pracují v systému EFF
- Algebraicky jednoduché rotované observační rovnice  $\Rightarrow$  rychlost
- Heterogenní data  $V_i, V_{ij}$  v libovolné orientaci
- Nepotřebuje derivace  $\bar{P}_{n,m} \dots$  rychlost, menší vliv zaokrouhlování
- Hotine zavádí tzv. Hotineho koeficienty jako lineární kombinace Stokesových parametrů
- Pozor na překlepy v Hotineho „Mathematical Geodesy“ ve vztazích pro  $V_i, V_{ij}$  (jen některá vydání mají erratu)

## Výpočet elipsoidálních funkcí Jekeliho renormalizací

- Založeno na hypergeometrické definici  $\bar{Q}_{n,m} \Rightarrow \bar{S}_{n,m}$
- „2 mouchy...“ - funkce pro počítání s EHK a současně pro výpočet konverze koeficientů
- Velmi přesné pro optimalizované funkce (nejhůře 8 platných cifer pro  $n_{max} = 2190$ )
- Výpočet  $\bar{S}_{n,m}^0, \bar{S}_{n,m}^1, \bar{S}_{n,m}^3$  v řádu vteřin s (1.6GHz, 1CPU, Matlab).
- Hypergeometrická formulace  $\Rightarrow$  mnoho dalších možností pro optimalizaci.
- Význam EH zejména při EHA

## Přímá SHA s Hotineho rovnicemi

- Hotineho rovnice pracují v systému EFF
- Algebraicky jednoduché rotované observační rovnice  $\Rightarrow$  rychlost
- Heterogenní data  $V_i, V_{ij}$  v libovolné orientaci
- Nepotřebuje derivace  $\bar{P}_{n,m} \dots$  rychlost, menší vliv zaokrouhlování
- Hotine zavádí tzv. Hotineho koeficienty jako lineární kombinace Stokesových parametrů
- Pozor na překlepy v Hotineho „Mathematical Geodesy“ ve vztazích pro  $V_i, V_{ij}$  (jen některá vydání mají erratu)

## Výpočet elipsoidálních funkcí Jekeliho renormalizací

- Založeno na hypergeometrické definici  $\bar{Q}_{n,m} \Rightarrow \bar{S}_{n,m}$
- „2 mouchy...“ - funkce pro počítání s EHK a současně pro výpočet konverze koeficientů
- Velmi přesné pro optimalizované funkce (nejhůře 8 platných cifer pro  $n_{max} = 2190$ )
- Výpočet  $\bar{S}_{n,m}^0, \bar{S}_{n,m}^1, \bar{S}_{n,m}^3$  v řádu vteřin s (1.6GHz, 1CPU, Matlab).
- Hypergeometrická formulace  $\Rightarrow$  mnoho dalších možností pro optimalizaci.
- Význam EH zejména při EHA

## Přímá SHA s Hotineho rovnicemi

- Hotineho rovnice pracují v systému EFF
- Algebraicky jednoduché rotované observační rovnice  $\Rightarrow$  rychlost
- Heterogenní data  $V_i, V_{ij}$  v libovolné orientaci
- Nepotřebuje derivace  $\bar{P}_{n,m} \dots$  rychlost, menší vliv zaokrouhlování
- Hotine zavádí tzv. Hotineho koeficienty jako lineární kombinace Stokesových parametrů
- Pozor na překlady v Hotineho „Mathematical Geodesy“ ve vztazích pro  $V_i, V_{ij}$  (jen některá vydání mají erratu)

## Výpočet elipsoidálních funkcí Jekeliho renormalizací

- Založeno na hypergeometrické definici  $\bar{Q}_{n,m} \Rightarrow \bar{S}_{n,m}$
- „2 mouchy...“ - funkce pro počítání s EHK a současně pro výpočet konverze koeficientů
- Velmi přesné pro optimalizované funkce (nejhůře 8 platných cifer pro  $n_{max} = 2190$ )
- Výpočet  $\bar{S}_{n,m}^0, \bar{S}_{n,m}^1, \bar{S}_{n,m}^3$  v řádu vteřin s (1.6GHz, 1CPU, Matlab).
- Hypergeometrická formulace  $\Rightarrow$  mnoho dalších možností pro optimalizaci.
- Význam EH zejména při EHA

## Přímá SHA s Hotineho rovnicemi

- Hotineho rovnice pracují v systému EFF
- Algebraicky jednoduché rotované observační rovnice  $\Rightarrow$  rychlost
- Heterogenní data  $V_i, V_{ij}$  v libovolné orientaci
- Nepotřebuje derivace  $\bar{P}_{n,m} \dots$  rychlost, menší vliv zaokrouhlování
- Hotine zavádí tzv. Hotineho koeficienty jako lineární kombinace Stokesových parametrů
- Pozor na překlepy v Hotineho „Mathematical Geodesy“ ve vztazích pro  $V_i, V_{ij}$  (jen některá vydání mají erratu)

**Děkuji CEDRu a za Vaši pozornost!**

