Dodatek A

Diferenciální geometrie

A.1 Tenzorová algebra

V této kapitole budou shrnuty základní algebraické vlastnosti vektorů, tenzorů a dalších geometrických objektů, tj. vlastnosti vztahující se k chování a vztahům jimi popsaných fyzikálních veličin v jednotlivých bodech příslušného fyzikálního prostoru (např. prostoročasu nebo fázového prostoru), nikoliv však k jejich prostorovým změnám.

A.1.1 Vektory a kovektory, tenzorový součin a úžení

Definice 1 **Vektorový prostor** *nad tělesem*[1] *skalárů (zpravidla reálných čísel $\mathcal{R}$, nebo komplexních čísel) je množina T vektorů, na které je dána operace sčítání s vlastnostmi:*
a) asociativnost, $\forall X, Y, Z \in T$: $(X+Y)+Z = X+(Y+Z)$
b) komutativnost: $X+Y = Y+X$
c) $\exists 0 \in T$ (nulový vektor): $X+0 = X$ ($\forall X \in T$)
d) $\forall X \in T$, $\exists -X \in T$ (opačný vektor): $-X+X = 0$,
a dále je na T dáno násobení skalárem s vlatnostmi:
e) $\forall X \in T$, $a, b \in \mathcal{R}$: $a(bX) = (ab)X$
f) $1.X = X$
g) distributivnost vůči sčítání vektorů: $a(X+Y) = aX + aY$
h) distributivnost vůči sčítání skalárů: $(a+b)X = aX + bX$.

Vektory $X_i|_{i=1}^n$ jsou **lineárně závislé**, *jestliže $\exists a_i|_{i=1}^n \in \mathcal{R}$: $\sum a_i^2 \neq 0$, $\sum a_i X_i = 0$.*

T je n**-dimenzionální**, *jestliže v něm existuje tzv. báze n lineárně nezávislých vektorů a každá $n+1$-tice vektorů je lineárně závislá.*

Duální vektorový prostor *T^* je prostor lineárních zobrazení*

$$\xi : T \to \mathcal{R}\ .$$

$\{e_k|_{k=1}^n \in T\}$ a $\{\theta^k|_{k=1}^n \in T^*\} = \{e_k|_{k=1}^n\}^*$ jsou vzájemně **duální báze** *T a T^*, jestliže*

$$\theta^i(e_j) = \delta^i_j\ . \tag{A.1}$$

[1] Těleso je asociativní okruh s jednotkou ($a.1 = 1.a = a$), ve kterém pro každý nenulový prvek a existuje inverzní prvek a^{-1} ($a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$). Okruh je komutativní grupa (vůči sčítání) s oboustranně distributivním násobením.

Zřejmě T^* k n-dimenzionálnímu T je rovněž n-dimenzionální. Ztotožňujeme $T^{**} \equiv T$ a píšeme

$$\xi(X) = \langle \xi X \rangle = X^i \xi_i \ ,$$

kde $X = X^i e_i \in T$ a $\xi = \xi_i \theta^i \in T^*$ (přes shodné horní a dolní indexy se sčítá).

Definice 2 *Prostor* T^p_q **tenzorů** *typu* (p, q) *je prostor multilineárních zobrazení*

$$A : \underbrace{T^* \times ... \times T^*}_{p} \times \underbrace{T \times ... \times T}_{q} \to \mathcal{R} \ .$$

Na množině tenzorů všech typů je definována operace **tenzorový součin**

$$\otimes : T^p_q \times T^r_s \to T^{p+r}_{q+s}$$

tak, že

$$(A \otimes B)(\underbrace{\xi, ...,}_{p} \underbrace{\eta, ...,}_{r} \underbrace{X, ...,}_{q} \underbrace{Y, ...}_{s}) = A(\underbrace{\xi, ...,}_{p} \underbrace{X, ...}_{q}).B(\underbrace{\eta, ...,}_{r} \underbrace{Y, ...}_{s}) \tag{A.2}$$

a zobrazení **úžení** *v* i*-tém a* j*-tém indexu*

$$\langle \quad \rangle : T^p_q \to T^{p-1}_{q-1}$$

tak, že

$$\langle A \rangle(\underbrace{\xi, ...,}_{i-1} \underbrace{\eta, ...,}_{p-i} \underbrace{X, ...,}_{j-1} \underbrace{Y, ...}_{q-j}) = \sum_{k=1}^{n} A(\underbrace{\xi, ...,}_{i-1} \theta^k, \underbrace{\eta, ...,}_{p-i} \underbrace{X, ...,}_{j-1} e_k, \underbrace{Y, ...}_{q-j}) \ , \tag{A.3}$$

kde $\{e_k|^n_{k=1}\} = \{\theta^k|^n_{k=1}\}^*$ *jsou libovolné duální báze.*

Zřejmě platí $\dim(T^p_q) = n^{p+q}$. Tenzorový součin tvoří algebru v prostoru direktních součtů $\oplus^\infty_{p,q=0} T^p_q$. Každá (nikoliv nutně duální) dvojice bází na T a T^* indukuje bázi na T^p_q (tvořenou tenzorovými součiny jejich prvků), v níž lze tenzor $A \in T^p_q$ vyjádřit složkově

$$A = A^{i_1,...,i_p}_{j_1,...,j_q} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes \theta^{j_1} \otimes ... \otimes \theta^{j_q} \ .$$

Lze ověřit, že definice úžení je nezávislá na volbě dvojice duálních bází.

A.1.2 Vnější algebra

Definice 3 *Prostory* p**-vektorů** $\wedge^p T \subset T^p_0$ *resp.* p**-forem** $\wedge^p T^* \subset T^0_p$ *($p \leq n$) jsou podprostory tenzorů antisymetrických ve všech argumentech.* **Vnější součin** *je zobrazení*

$$\wedge : \wedge^p T \times \wedge^q T \to \wedge^{p+q} T$$

takové, že

$$(X \wedge Y)(\xi_1, ..., \xi_{p+q}) = \sum_\sigma \frac{(-1)^{|\sigma|}}{p!q!} (X \otimes Y)(\xi_{\sigma(1)}, ..., \xi_{\sigma(p+q)}) \ , \tag{A.4}$$

kde $|\sigma|$ *je parita permutace* σ *čísel* $1, ..., p+q$. **Vnitřní součin** p*-formy* ξ *a* q*-vektoru* X *je* $|p-q|$*-forma resp. vektor vzniklý zúžením jejich tenzorového součinu v prvních* $\min(p, q)$ *indexech,*

$$\langle \xi X \rangle = \langle \xi \otimes X \rangle \ .$$

Zřejmě platí že $\dim(\wedge^p T) = \binom{n}{p}$, $\wedge^0 T = \mathcal{R}$, $\wedge^1 T = T_0^1 = T$, $\wedge^1 T^* = T_1^0 = T^*$. Vnější součin je antisymetrický

$$(X \wedge Y) = (-1)^{qp}(Y \wedge X) , \tag{A.5}$$

lineární a asociativní. Tvoří tedy (tzv. Grassmanovu) algebru v 2^n-dimenzionálním prostoru direktních součtů $\oplus_{p=0}^n(\wedge^p T)$.

Definice 4 *Zvolíme-li na n-dimenzionálním prostoru T* **jednotkovou n-formu** $\epsilon \in \wedge^n T^*$, *pak tato definuje* **duální zobrazení**

$$* : \wedge^p T \leftrightarrow \wedge^{n-p} T^*$$

tak, že pro $A \in \wedge^p T$, $\omega \in \wedge^p T^*$

$$*A = \frac{1}{p!}\langle \epsilon A \rangle . \tag{A.6}$$

$$*\omega = \frac{1}{p!}\langle \omega E \rangle , \tag{A.7}$$

kde $E \in \wedge^n T$ je **jednotkový n-vektor**, *pro který*

$$*E = 1 . \tag{A.8}$$

Platí

$$* * \omega = (-1)^{p(n-p)}\omega . \tag{A.9}$$

Vnější součin p-vektorů je třeba odlišovat od vektorového součinu vektorů, který je také antisymetrická a bilineární operace (někdy také označovaná symbolem $\wedge$), ale definovaná pouze na 3-dimenzionálním vektorovém prostoru. V takovém prostoru s metrikou lze vektorový součin Z vektorů X, Y lze konstruovat zvednutím indexů jejich kontrakce s jednotkovou 3-formou, $Z \equiv X \times Y = g^{-1}(\langle \epsilon, X \otimes Y \rangle)$.

A.1.3 Skalární součin

Definice 5 *Symetrický, tzv.* **kovariantní metrický tenzor** $g \in T_2^0$, *pro jehož složky g_{ij} v libovolné bázi T^* je*

$$\det(g_{ij}) \neq 0 ,$$

definuje na T **skalární součin**

$$(\quad . \quad) : T \times T \to \mathcal{F}$$

tak, že pro $\forall X, Y \in T$

$$(X.Y) = (Y.X) = g(X, Y) = g_{ij} X^i Y^j \tag{A.10}$$

(kde X^i a Y^j jsou složky v duální bázi), dále definuje **snižování indexů**, *tj. zobrazení*

$$g : T \to T^*$$

tak, že

$$\langle g(X) Y \rangle = g(X, Y) . \tag{A.11}$$

*g dále indukuje k němu inverzní zobrazení (***zvyšování indexů***)*

$$g^{-1} : T^* \to T ,$$

které definuje skalární součin na T^*

$$(\xi.\eta) = (\eta.\xi) = g(g^{-1}(\xi), g^{-1}(\eta)) = g^{ij}\xi_i\eta_j \ , \tag{A.12}$$

kde g^{ij} jsou složky **kontravariantního metrického tenzoru** $g^{-1} \in T_0^2$. *Báze $\{e_i\}$ je* **ortogonální**, *jestliže*

$$(e_i.e_j) = 0 \qquad \text{pro} \qquad i \neq j \ ,$$

a **ortonormální**, *jestliže*

$$(e_i.e_j) = \pm\delta_{ij} \ .$$

A.2 Tenzorová analýza

V této kapitole budou shrnuty základní vlastnosti tečných vektorů, vektorových a tenzorových polí a jejich derivací na zakřivených prostorech (varietách) jako je např. obecně relativistický prostoročas.

A.2.1 Tečné vektory a n-formy na varietách

Definice 6 *Topologický prostor M je* **diferencovatelná varieta** *dimenze n, jestliže je dán tzv. úplný atlas souřadnicových map, tj. lokálně definovaných zobrazení*

$$\mu, \nu : M \to \mathcal{R}^n$$

pokrývajících celé M takových, že v průniku jejich definičních oborů je $\mu \circ \nu^{-1}$ nekonečně diferencovatelné s nenulovým jakobiánem.

Definice 7 *Nechť M je diferencovatelná varieta a $\mathcal{F}$ prostor reálných funcí ("skalárů") na M.* **Tečným vektorem** *v bodě $A \in M$ nazveme zobrazení*

$$X_A : \mathcal{F} \to \mathcal{R}$$

které je lineární, tj. splňuje

$$X_A(f + c.g) = X_A(f) + c.X_A(g) \tag{A.13}$$

pro libovolná $f, g \in \mathcal{F}$, $c \in \mathcal{R}$, pro které platí

$$X_A(f.g) = X_A(f).g(A) + f(A).X_A(g) \ . \tag{A.14}$$

Množina T_A všech tečných vektorů v pevném bodě A se nazývá **fibre**, *a jejich sjednocení $B = \cup_{A\in M} T_A$* **tečný bundle**.

Vlastnost (A.13) určuje, že X_A jsou lineární zobrazení na (∞-dimenzionálním) vektorovém prostoru $\mathcal{F}$. Tečný fibre tedy tvoří opět lineární vektorový prostor vůči operacím sčítání a násobení číslem definovaným vztahem

$$(X_A + cY_A)(f) = X_A(f) + cY_A(f) \ .$$

Vlastnost (A.14) určuje, že X_A se chová jako derivace (tedy např. $X_A(f^n) = nf^{n-1}X_A(f)$), takže tečný vektor je diferenciální operátor. Lze ukázat, že souřadnicové vyjádření X_A v mapě μ ($\mu(A) = (x_A^1, ..., x_A^n)$) má tvar

$$X_A(f) = X_A^i \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ \mu^{-1})|_{\mu(A)} \ . \tag{A.15}$$

Fibre T_A je tedy n-dimenzionální vektorový prostor a $\{\frac{\partial}{\partial x_A^i}|_{i=1}^n\}$ jeho souřadnicová báze indukovaná mapou μ. Tečný bundle B tvoří $2n$-dimenzionální varietu, jejíž atlas je tvořen všemi mapami slučitelnými s mapou, která $\forall X_A \in T_A$ přiřadí $(x_A^1, ..., x_A^n, X_A^1, ..., X_A^n) \in \mathcal{R}^{2n}$.

Definice 7 odpovídá intuitivní představě vektoru X_A jako šipky z bodu $A \in M$ do (infinitezimálně vzdáleného) bodu $A + \Delta$ tak, že pro $\forall f \in \mathcal{F}$ (a speciálně i když za f zvolíme složku souřadnicové mapy) $X_A(f)$ udává lineární člen Taylorova rozvoje

$$f(A + \Delta) \simeq f(A) + X_A(f) \ .$$

Definice 8 *Nechť M je diferencovatelná varieta a $\mathcal{F}$ prostor reálných funcí ("skalárů") na M. Tečný vektorový prostor T na M je prostor* **tečných vektorů** *X (neboli "kontravariantních vektorových polí") na M, tj. prostor zobrazení*

$$X : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$$

která jsou lineární a diferenciální, tj. splňují

$$X(f + c.g) = X(f) + c.X(g) \tag{A.16}$$

$$X(f.g) = X(f).g + f.X(g) \tag{A.17}$$

pro libovolná $f, g \in \mathcal{F}$, $c \in \mathcal{R}$.

Vektorové pole na M tvoří n-dim. podvarietu tečného bundlu.

Definiční obor $\{A \in M\}$ vektorového pole lze omezit na libovolné $N \subset M$ ($X : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(N)$). Je-li N podvarieta M, pak $T(N)$ je podprostor $T(M)$ vektorů tečných k N. Zřejmě totiž každá funkce na M je současně funkcí na N, proto tečný vektor na N je vektorem i na M, definovaným pouze v bodech N a 'necitlivým' k rozdílnému chování funkcí mimo N. Každá souřadnicová mapa $\mu(A) = \{x^i(A)|_{i=1}^n\}$ indukuje ve svém definičním oboru souřadnicovou bázi $\{\partial_{x^i}|_{i=1}^n\}$ (rozumí se $\partial_{x^i} f = \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ \mu^{-1})$). Při přechodu k souřadnicím $\{y^i\}$ se prvky souřadnicové báze transformují

$$\partial_{x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \partial_{y^j} \ . \tag{A.18}$$

Tvrzení 1 *Komutátor*

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X \tag{A.19}$$

vektorů X, Y je vektor.

Pro důkaz je klíčová vlastnost komutátoru daná rovnicí (A.15), která platí, protože smíšené členy typu $X(f).Y(g)$ se vyruší. Prvky souřadnicové báze komutují (jsou 'holonomní'). V obecné bázi $\{e_i\} = \{\theta^i\}^*$

$$[X, Y] = (X(Y^k) - Y(X^k) + X^i Y^j c_{ij}^k) e_k \ , \tag{A.20}$$

kde

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k = \theta^k([e_i, e_j]) \tag{A.21}$$

jsou tzv. **koeficienty struktury** dané báze.

Definice 9 *Kotečný vektorový prostor T^* je duální vektorový prostor* **1–forem** *neboli "kovariantních vektorových polí", tj. prostor zobrazení*

$$\xi : T \to \mathcal{F} \ .$$

Analogicky prostor T^p_q **tenzorů** *typu (p,q) je prostor multilineárních zobrazení*

$$A : \underbrace{T^* \times ... \times T^*}_{p} \times \underbrace{T \times ... \times T}_{q} \to \mathcal{F}$$

*a prostory p-***vektorů** *resp. p-***forem** *jsou antisymetrické podprostory T^p_0 resp. T^0_p. V prostorech všech tenzorů resp. p-vektorů a p-forem jsou definovány tenzorový součin a úžení, resp. vnější a vnitřní součin analogicky definicím 2 a 3.*

Tenzor typu T^0_p na M je současně tenzorem téhož typu na podvarietě $N \subset M$, spec. p-forma na M je p-formou na N (nenulovou pouze pro $p \leq \dim N$).

Definice 10 **Vnější diferenciál** *je lineární zobrazení*

$$d : \wedge^p T^* \to \wedge^{p+1} T^*$$

takové, že

$$df(X) = X(f) \tag{A.22}$$

pro $f \in \wedge^0 T^* = \mathcal{F}$,

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge (d\eta) \tag{A.23}$$

pro $\omega \in \wedge^p T^*$ a

$$dd\omega = 0 \ . \tag{A.24}$$

Pro každou souřadnicovou mapu $\{x^i|_{i=1}^n\}$ tvoří $\{dx^i|_{i=1}^n\}$ bázi T^*, která se transformuje

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j \tag{A.25}$$

a je duální k bázi $\{\partial_{x^i}|_{i=1}^n\}$

Tvrzení 2 *Pro 1-formu ω je*

$$d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]) \ . \tag{A.26}$$

Důkaz: V libovolné souřadnicové bázi platí podle (A.18)

$$\begin{aligned} X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]) &= X(\omega_j Y^j) - Y(\omega_j X^j) - \omega_j(X(Y^j) - Y(X^j)) = \\ &= X(\omega_j)Y^j - Y(\omega_j)X^j = (d\omega_j \wedge dx^j)(X,Y) = d\omega(X,Y) \end{aligned}$$

Q.E.D.

Důsledek: V duální bázi lze koeficienty struktury vyjádřit alternativně k (A.21) jako

$$c^k_{ij} = -d\theta^k(e_i, e_j) \ . \tag{A.27}$$

Definice 11 *$\omega \in \wedge^p T^*$ definuje* **míru** *(integrál) na p-dimenzionální podvarietě $N \subset M$*

$$\int \omega = \int \omega(\partial_{x^1}, ..., \partial_{x^p}) dx^1 ... dx^p \ , \tag{A.28}$$

kde $\{x^i|_{i=1}^p\}$ je libovolná souřadnicová mapa na N.

Tvrzení 3 Zobecněná Stokesova věta *Pro uzavřenou p-dimenzionální hranici ∂V $(p+1)$-dimenzionální oblasti V platí*

$$\int_V d\omega = \int_{\partial V} \omega \ . \tag{A.29}$$

Definice 12 Vnitřní derivace *je zobrazení $\delta : T \to \mathcal{F}$ takové, že $\forall f \in \mathcal{F}$ a $X, Y \in T$ platí*

$$\delta(fX + Y) = X(f) + f\delta X + \delta Y \ . \tag{A.30}$$

Vnitřní derivace vektorového pole X je tedy ve zvolené bázi v n-dimenzionálním prostoru dána n-ticí funkcí (derivacemi jednotlivých prvků báze),

$$\delta X = e_i(X^i) + X^i \delta e_i \ . \tag{A.31}$$

Každá n-forma Ω na n-dimensionální varietě určuje vnitřní derivaci δ vektoru X vztahem

$$d\langle \Omega X \rangle = (\delta X)\Omega \ . \tag{A.32}$$

V souřadnicové bázi, ve které $\Omega = \Omega_0 dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$ a $X = X^i \partial_i$, totiž

$$d\langle \Omega X \rangle = \partial_i(\Omega_0 X^i) dx^1 \wedge ... \wedge dx^n = (\partial_i(X^i) + X^i \partial_i(\ln \Omega_0))\Omega_0 dx^1 \wedge ... \wedge dx^n \ , \tag{A.33}$$

což odpovídá vztahu (A.31), jestliže vnitřní derivace prvků báze ∂_i zavedeme vztahem

$$\delta \partial_i = \partial_i(\ln \Omega_0) \ . \tag{A.34}$$

Naopak, obecnou vnitřní derivaci δ lze zapsat ve tvaru (A.33), jestliže lze nalézt funkci Ω_0 tak, aby splňovala rovnice (A.34), tj. jsou-li splněny podmínky integrability těchto rovnic

$$\partial_i(\delta \partial_j) = \partial_j(\delta \partial_i) \ , \tag{A.35}$$

které mají v obecné bázi tvar

$$e_i(\delta e_j) - e_j(\delta e_i) = \delta[e_i, e_j] \ . \tag{A.36}$$

Důsledek: Pro vnitřní derivaci δ splňující tyto podmínky platí podle (A.32) a (A.29)

$$\int_V (\delta X)\Omega = \int_{\partial V} \langle \Omega X \rangle \ . \tag{A.37}$$

A.2.2 Afinní konexe

Definice 13 **Afinní konexí** *nazveme zobrazení*

$$\nabla : T \times T \to T$$

takové, že $\forall X, Y, Z \in T, f \in \mathcal{F}$

$$\nabla_{f.Y+Z} X = f.\nabla_Y X + \nabla_Z X \tag{A.38}$$

$$\nabla_X (f.Y + Z) = X(f).Y + f.\nabla_X Y + \nabla_X Z \; . \tag{A.39}$$

Afinní konexe $\nabla_X Y$ se tedy chová tenzorově vůči indexu X a diferenciálně vůči argumentu Y, tj. popisuje změnu pole Y podél pole X. V libovolné duální bázi $\{e_i\} = \{\theta^i\}^*$

$$\nabla_X Y = \left(X(Y^k) + Y^i {\omega^k}_i(X) \right) .e_k \; , \tag{A.40}$$

kde

$${\omega^k}_i = {\omega^k}_{ij} \theta^j = \theta^k(\nabla_{e_j} e_i).\theta^j \tag{A.41}$$

jsou **1-formy konexe** v příslušné bázi (jejich složky ${\omega^k}_{ij}$ jsou tzv. **Ricciho rotační koeficienty**).

Požadavkem

$$X(\langle \xi Y \rangle) = \langle \nabla_X \xi Y \rangle + \langle \xi \nabla_X Y \rangle \; , \tag{A.42}$$

resp. analogickým požadavkem na rozderivování tenzorového součinu a jeho zúžení, je definována afinní konexe také na 1-formách

$$\nabla_X \xi = \left(X(\xi_k) - \xi_i {\omega^i}_k(X) \right) .\theta^k \; , \tag{A.43}$$

resp. na tenzorech T^p_q jako zobrazení

$$\nabla : T \times T^p_q \to T^p_q$$

takové, že $\forall A \in T^p_q, X, Y, ... \in T, \xi, ... \in T^*$

$$X(A(\xi, ..., Y, ...)) = \nabla_X A(\xi, ..., Y, ...) + A(\nabla_X \xi, ..., Y, ...) + ... + A(\xi, ..., \nabla_X Y, ...) + ... \; . \tag{A.44}$$

Definice 14 **Kovariantní derivací** *(odpovídající afinní konexi* ∇*) nazveme zobrazení*

$$D : T^p_q \to T^p_{q+1}$$

takové, že $\forall A \in T^p_q, X \in T$

$$\langle DA \otimes X \rangle = \nabla_X A \; . \tag{A.45}$$

V libovolné duální bázi $\{e_i\} = \{\theta^i\}^*$ značíme

$$DA = \nabla_{e_k} A \otimes \theta^k = A^{i_1,...,i_p}_{j_1,...,j_q;k} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes \theta^{j_1} \otimes ... \otimes \theta^{j_q} \otimes \theta^k \; , \tag{A.46}$$

a píšeme

$$A^{i_1,...,i_p}_{j_1,...,j_q;k} = A^{i_1,...,i_p}_{j_1,...,j_q,k} + A^{i,...,i_p}_{j_1,...,j_q} {\omega^{i_1}}_{ik} + ... - A^{i_1,...,i_p}_{j,...,j_q} {\omega^j}_{j_1 k} - ... \; , \tag{A.47}$$

kde

$$A^{i_1,...,i_p}_{j_1,...,j_q,k} = e_k(A^{i_1,...,i_p}_{j_1,...,j_q}) \; .$$

Definice 15 Divergencí *vektorového pole X (odpovídající afinní konexi ∇) nazveme skalár, který je zúžením kovariantní derivace X, tj.*

$$\mathrm{div} X = \langle DX \rangle = X^k{}_{,k} + X^i \omega^k{}_{ik} \ . \tag{A.48}$$

Porovnáním tohoto vztahu s (A.31) je zřejmé, že divergence je vnitřní derivací a její působení na vektory báze je dáno zúžením Ricciho rotačních koeficientů,

$$\delta e_i = \omega^k{}_{ik} \ . \tag{A.49}$$

Matice 1-forem konexe (viz (A.41)) se nechová tenzorově v indexech k a i při přechodu k jiné bázi, avšak lze z ní tenzory vytvořit.

Definice 16 *Jestliže ∇ je afinní konexe, pak* **tenzorem torze** *(určeným touto konexí) nazveme tenzor $Q \in (T \otimes \wedge^2 T^*) \subset T^1_2$ takový, že $\forall X, Y \in T$*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = \langle Q, X \otimes Y \rangle \tag{A.50}$$

a **tenzorem křivosti** *nazveme tenzor $R \in (T \otimes T^* \otimes \wedge^2 T^*) \subset T^1_3$ takový, že $\forall X, Y, Z \in T$*

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z = \langle R, Z \otimes X \otimes Y \rangle \ . \tag{A.51}$$

Oba tyto tenzory jsou antisymetrické v posledních dvou argumentech (X a Y), proto je lze ve zvolené bázi reprezentovat 2-formami torze τ^k resp. křivosti $\Omega^k{}_i$ tak, že

$$Q = e_k \otimes \tau^k \ ,$$

$$R = e_k \otimes \theta^i \otimes \Omega^k{}_i \ .$$

Z porovnání (A.40) a (A.20) je zřejmé, že

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = \left(Y^i \omega^k{}_i(X) - X^i \omega^k{}_i(Y) - X^i Y^j c^k_{ij} \right) .e_k \ , \tag{A.52}$$

takže

$$Q^k{}_{ij} = \omega^k{}_{ji} - \omega^k{}_{ij} - c^k_{ij} \ . \tag{A.53}$$

Tvrzení 4 Cartanovy rovnice struktury *první*

$$\tau^k = d\theta^k + \omega^k{}_i \wedge \theta^i \tag{A.54}$$

a druhé

$$\Omega^k{}_i = d\omega^k{}_i + \omega^k{}_j \wedge \omega^j{}_i \ . \tag{A.55}$$

Speciálně pro konexi bez torze je pravá strana (A.54) identicky rovna nule. Důkaz (A.54) plyne dosazením (A.27) do (A.53). Podobně (A.55) vyplývá z (A.51) dosazením (A.40) a užitím (A.26).

A.2.3 Riemannovská geometrie

Definice 17 **Metrickou konexí** *nazýváme afinní konexi* ∇, *která zachovává skalární součin, tj. takovou, která splňuje*

$$Z(X,Y) = (\nabla_Z X, Y) + (X, \nabla_Z Y) \tag{A.56}$$

pro všechna X, Y, Z.

Dosazením za X, Y, Z bázových vektorů e_i, e_j, e_k dostáváme vztah

$$dg_{ij} = \omega_{ij} + \omega_{ji} \ , \tag{A.57}$$

kde 1-formy $\omega_{ij} = g_{ik}\omega^k{}_j$, nebo ve složkovém zápisu

$$e_k(g_{ij}) = \omega_{ijk} + \omega_{jik} \ . \tag{A.58}$$

Po snížení indexu k v rovnici (A.53) můžeme nalézt řešení lineární soustavy (A.53), (A.58) ve tvaru

$$\begin{aligned} \omega_{ijk} \quad = \quad & \frac{1}{2}(e_k(g_{ij}) + e_j(g_{ik}) - e_i(g_{jk}) \\ & -c_{ijk} + c_{jik} + c_{kij} \\ & -Q_{ijk} + Q_{jik} + Q_{kij} \ ) \ . \end{aligned} \tag{A.59}$$

Afinní konexe je tak jednoznačně určena požadavkem metričnosti a požadavkem vymizení torze (pro který je třetí řádek tohoto výrazu identicky rovný nule). V souřadnicové bázi, ve které vymizí i koeficienty struktury ve druhém řádku, jsou složky $\omega^i{}_{jk}$ nazývány Christoffelovy symboly (a obvykle značeny $\Gamma^i{}_{jk}$).

Tvrzení 5 *Divergence (definovaná vztahem (A.48)) odpovídající metrické konexi bez torze je vnitřní derivace určená podle vztahu (A.32) n-formou* Ω *objemu jednotkového vzhledem k metrice generující konexi*

$$(\mathrm{div} X)\Omega = d\langle X.\Omega\rangle \ . \tag{A.60}$$

Důkaz: Podle (A.59)

$$\omega^k{}_{jk} = \frac{1}{2} g^{ki} g_{ik,j} = \frac{|g|,j}{2|g|} \ , \tag{A.61}$$

kde $|g|$ je determinant matice kontravariantních složek metriky (složka g^{ik} jakožto prvek matice inverzní ke kovariantním složkám metriky je totiž podíl subdeterminantu ke g_{ik} a celého determinantu $|g|$). Metrická divergence tedy splňuje podmínku (A.34) pro

$$\Omega = \sqrt{\pm|g|} dx^1 \wedge ... \wedge dx^n \ , \tag{A.62}$$

což je n-forma objemu jednotkového vůči g, která má v libovolné ortonormální bázi jednoduchý tvar $\Omega = \theta^1 \wedge ... \wedge \theta^n$.

Důsledek (Gaussova věta): Pro riemannovskou divergenci vektorového pole X platí podle (A.37)

$$\int_V (\mathrm{div} X)\Omega = \int_{\partial V} \langle \Omega X\rangle \ . \tag{A.63}$$

Tvrzení 6 *Pro metrickou konexi splňují složky $R^i{}_{klm} = \langle \Omega^i{}_k, e_l \otimes e_m \rangle$ tenzoru křivosti antisymetrii*

$$R_{iklm} = -R_{kilm} \ . \tag{A.64}$$

Pro konexi bez torze splňují symetrii

$$R^i{}_{(klm)} \equiv R^i{}_{klm} + R^i{}_{lmk} + R^i{}_{mkl} = 0 \ , \tag{A.65}$$

a tzv. **Bianchiho identity**

$$R^i{}_{k(lm;n)} \equiv R^i{}_{klm;n} + R^i{}_{knl;m} + R^i{}_{kmn;l} = 0 \ . \tag{A.66}$$

Na n-dimensionální varietě má **Riemannův tenzor***, tj., tenzor křivosti určený metrickou konexí bez torze $\frac{1}{12}n^2(n^2-1)$ algebraicky nezávislých složek.*

Ricciho tenzor $R_{km} = R^i{}_{kim}$ *je potom symetrický.*

Tvrzení 7 *Vektor $X = \frac{d}{dt}$ tečný ke geodetické křivce $x = x(t)$, tj. přímce, která je extremálou délky S,*

$$0 = \delta S = \delta \int \sqrt{g(X,X)} dt \ , \tag{A.67}$$

je paralelně přenášen podél této křivky, tj.

$$\nabla_X X = 0 \ . \tag{A.68}$$

Důkaz: Rovnice extremály akce $S = \int L(x,\dot{x})dt$ dostaneme variováním δx dráhy x a jejích derivací $\delta \dot{x}$. K vyjádření lagrangiánu geodetiky v tomto tvaru je výhodné vzít složky ($X^i = \dot{x}^i$) tečného vektoru $X \equiv \frac{d}{dt}$ v souřadnicové basi ∂_{x^i} souřadnicového systému x^i, tj.

$$L(x,\dot{x}) = \sqrt{g_{ij}(x)\dot{x}^i \dot{x}^j} \ . \tag{A.69}$$

Dosazením tohoto lagrangiánu do standardního postupu variování

$$0 = \delta S = \int \delta L(x,\dot{x}) dt = \int \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right] \delta x dt \ , \tag{A.70}$$

dostáváme vztah

$$0 = \frac{1}{2\sqrt{g(\dot{x},\dot{x})}} g_{ij,k}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j - \frac{d}{dt}\left(\frac{g_{ik}\dot{x}^i + g_{kj}\dot{x}^j}{2\sqrt{g(\dot{x},\dot{x})}} \right) \ , \tag{A.71}$$

tj.,

$$0 = \frac{1}{2}(g_{ij,k} - g_{ik,j} - g_{kj,i})\dot{x}^i\dot{x}^j - g_{ik}\ddot{x}^i - g_{ik}\dot{x}^i \sqrt{g(\dot{x},\dot{x})} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{g(\dot{x},\dot{x})}} \right) \ . \tag{A.72}$$

Tento vztah platí pro libovolnou parametrizaci dráhy $x(t)$. Jestliže navíc naložíme podmínku aby t byl afinní parametr, tj. $t = S$, pak $g(\dot{x},\dot{x}) = 1$ a poslední člen vymizí. S touto podmínkou můžeme geodetiku vypočítat i z ekvivalentního variačního principu

$$0 = \delta \int g(\dot{x},\dot{x}) dt \ . \tag{A.73}$$

Vzhledem k tomu, že v souřadnicové bázi $c_{ijk} = 0$, nalézáme porovnáním prvního členu na pravé straně (A.72) s rovnicí (A.59), že odpovídá $-\omega_{kij}\dot{x}^i\dot{x}^j$ metrické konexe bez torze ($Q_{ijk} = 0$) a první dva členy tak dávají levou stranu rovnice (A.68).

A.3 Lieova derivace a Killingovy vektory

Definice 18 Lieova derivace $\pounds_X$ *podle vektorového pole* X *je zobrazení* $\pounds_X : T^p_q \to T^p_q$ *takové, že*

$$\pounds_X(A \otimes B) = (\pounds_X A) \otimes B + A \otimes (\pounds_X B) \; , \tag{A.74}$$

$$\pounds_X \langle A \rangle = \langle \pounds_X A \rangle \; , \tag{A.75}$$

$$\pounds_X f = X(f) \qquad \text{pro } \forall f \in T^0_0 \; , \tag{A.76}$$

a

$$\pounds_X Y = [X, Y] \qquad \text{pro } \forall Y \in T^1_0 \; . \tag{A.77}$$

Ve srovnání s rov. (A.38) pro afinní konexi přibývá na pravé straně výrazu

$$\pounds_{fX+Z} Y = f \pounds_X Y + \pounds_Z Y - Y(f) X \tag{A.78}$$

třetí člen. Proto v obecné bázi $\{e_i\}$

$$\pounds_X Y = X^i \pounds_{e_i} Y - Y(X^i) e_i = X^i e_i(Y^k) e_k - Y^k e_k(X^i) e_i + X^i Y^k [e_i, e_k] \; , \tag{A.79}$$

a speciálně v souřadnicové bázi

$$(\pounds_X Y)^i = X^k Y^i_{\;,k} - Y^k X^i_{\;,k} \; . \tag{A.80}$$

Protože pro $\sigma \in T^0_1$

$$\pounds_X \langle \sigma, Y \rangle = \langle \pounds_X \sigma, Y \rangle + \langle \sigma, \pounds_X Y \rangle \; , \tag{A.81}$$

pro složky Lieovy derivace ko-vektoru platí obecně

$$\begin{aligned} (\pounds_X \sigma)_i &= \langle \pounds_X \sigma, e_i \rangle = \pounds_X \langle \sigma, e_i \rangle - \langle \sigma, \pounds_X e_i \rangle = X(\sigma_i) - \langle \sigma, [X, e_i] \rangle \\ &= X^k e_k(\sigma_i) + e_i(X^k) \sigma_k - X^k \langle \sigma, [e_k, e_i] \rangle \; . \end{aligned} \tag{A.82}$$

V souřadnicové bázi $\{dx^i\}$ tedy platí pro složky

$$(\pounds_X \sigma)_i = X^k \sigma_{i,k} + \sigma_k X^k_{\;,i} \tag{A.83}$$

a pro derivace prvků báze

$$\pounds_X (dx^k) = X^k_{\;,i} dx^i \; , \tag{A.84}$$

takže pro libovolný skalár f

$$\pounds_X (df) = d[X(f)] \; . \tag{A.85}$$

Podobně pro Lieovy derivace vyšších tenzorů přibývá k derivacím složek pro každý kontravariantní nebo kovariantní index člen s derivacemi X analogický druhým členům v rovnicích (A.80) nebo (A.83). Jestliže varieta je riemannovská, parciální derivace v těchto rovnicích mohou být nahrazeny i kovariantními derivacemi, protože přídavné členy s konexemi se v důsledku symetrie $\omega_{i(jk)}$ vzájemně vyruší. Speciálně pro p-formu σ platí (vzhledem k (A.84))

$$\begin{aligned} \pounds_X \sigma &= \pounds_X (\sigma_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}) = X^k \sigma_{i_1 \ldots i_p, k} + \sum \sigma_{i_1 \ldots k \ldots i_p} X^k_{\;,i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} = \\ &= d\langle \sigma, X \rangle \; . \end{aligned} \tag{A.86}$$

Tvrzení 8 *Nechť na n-dimenzionální varietě M je dána jednoparametrická grupa pohybů (tj. zobrazení $M \times \mathcal{R} \to M$ takové, že $\forall w \in \mathcal{R}$ a $x_0 \in M$ $\exists x_w = x(x_0, w) \in M$). Pak pro každou otevřenou oblast Σ_0 (která se grupovým pohybem transformuje na Σ_w) p-dimenzionální nadplochy ($p \leq n$) a p-formu $\sigma \in \wedge^p T^*$ platí*

$$\frac{d}{dw} \int_{\Sigma_w} \sigma = \int_{\Sigma_w} £_{\frac{d}{dw}} \sigma \; . \tag{A.87}$$

Důkaz vyplývá ze záměnnosti integrace a derivace v souřadnicovém vyjádření

$$\int_{\Sigma_w} \sigma = \int \langle \sigma, \frac{\partial}{\partial s_1} ... \frac{\partial}{\partial s_p} \rangle ds_1 ... ds_p = \int \sigma_{i_1 ... i_p} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial s_1} ... \frac{\partial x^{i_p}}{\partial s_p} ds_1 ... ds_p \; , \tag{A.88}$$

kde $\{s_1, ..., s_p\}$ je libovolná parametrizace nadplochy Σ_0, přenášená grupovým pohybem i na nadplochy Σ_w ($x^i = x^i(s_1...s_p, w)|_{i=1}^n$) a $\frac{\partial x^{i_k}}{\partial s_k}$ jsou souřadnicové složky vektorů tečných k těmto plochám. Vektor tečný k pohybovým trajektoriím je v souřadnicovém vyjádření

$$X \equiv \frac{d}{dw} = \frac{\partial x^i}{\partial w} \frac{\partial}{\partial x^i} \; , \tag{A.89}$$

takže derivováním (A.88) dostáváme

$$\frac{d}{dw} \int_{\Sigma_w} \sigma = \int \left[\sigma_{i_1 ... i_p, k} X^k \frac{\partial x^{i_1}}{\partial s_1} ... \frac{\partial x^{i_p}}{\partial s_p} + \sum_{k=1}^{p} \sigma_{i_1 ... i_p} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial s_1} ... \frac{\partial^2 x^{i_k}}{\partial s_k \partial w} ... \frac{\partial x^{i_p}}{\partial s_p} \right] ds_1 ... ds_p \; , \tag{A.90}$$

což podle (A.86) souhlasí s pravou stranou dokazovaného vztahu (A.87).

Definice 19 *Na riemannovské varietě s metrikou g se vektor ξ nazývá* **Killingův vektor**, *jestliže*

$$£_\xi g = 0 \; . \tag{A.91}$$

Vyjádříme-li tuto podmínku v souřadnicových složkách

$$0 = (£_\xi g)_{ik} = \xi^l g_{ik;l} + g_{lk} \xi^l{}_{;i} + g_{il} \xi^l{}_{;k} \; , \tag{A.92}$$

dostáváme

$$0 = \xi_{k;i} + \xi_{i;k} \; , \tag{A.93}$$

protože pro metrickou konexi kovariantní derivace složek metriky identicky vymizí.

Tvrzení 9 *Jestliže $X = \frac{d}{dt}$ je vektor tečný ke geodetice, pak pro každý Killingův vektor ξ je skalární součin $g(\xi, X)$ konstantní podél této geodetiky.*

Důkaz:

$$\frac{d}{dt} g(\xi, X) = (\xi_k X^k)_{;i} X^i = \xi_{k;i} X^i X^k + \xi_k X^k{}_{;i} X^i = 0 \; , \tag{A.94}$$

protože první člen vymizí díky antisymetrii $\xi_{[k;i]}$ podle (A.93), a druhý člen podle rovnice geodetiky (A.68).