Kapitola 3

Kinetická teorie

V obecném pojetí kinetická teorie popisuje soustavy skládající se z velkého počtu podsoustav (jednoho nebo několika druhů), z nichž každá se může nacházet v některém stavu z jisté množiny stavů. Předpokládá se, že stav celé soustavy je plně popsán, je-li dán počet podsoustav nacházejících se v každém stavu, tj. je dáno rozdělení podsoustav do jednotlivých stavů. Jestliže je znám deterministický nebo probabilistický pohyb každé podsoustavy, pak lze odvodit i pohybovou rovnici pro jejich rozdělení. Speciálně lze hledat i rovnovážná rozdělení, ve kterých se vnitřní pohyb podsoustav mezi jednotlivými stavy navzájem kompenzuje.

Díky této své základní filosofii kinetická teorie nemůže popisovat jevy jako je např. kvantová interference. Lze ji však užívat např. k popisu rozdělení souboru kvantových částic do jejich vnitřních (např. excitačních) stavů, k popisu různých chemických reakcí, biologických, nebo i společenských procesů. Pro nás zde bude nejdůležitější aplikací kinetické teorie popis rozdělení částic plynu do jejich jednotlivých pohybových stavů, ze kterého lze odvodit termodynamický i magnetohydrodynamický[1] popis plazmatu (viz kapitola 3.1).

Jak jsme viděli v kapitole o elektrodynamice, elektromagnetické záření lze popisovat rovněž jako plyn složený z ultrarelativistických částic – fotonů. V odstavci 3.1.3 si ukážeme, že tzv. rovnice přenosu záření, popisující šíření energie prostřednictvím elmg. vln, je totožná s Boltzmannovou kinetickou rovnicí pro fotonový plyn. To umožňuje jednotný pohled na obě složky vystupující v problémech tzv. zářivé hydrodynamiky popisující případy,[2] kdy pohyb kontinua (plynu, plazmatu) je podstatně ovlivněn zářením, které se v něm šíří. K tomuto ovlivnění může docházet jednak nepřímo tím, že přenos energie zářením 'řídí' rozdělení teploty a tedy i tlaku plynu působícího pak na dynamiku plynu, ale také přímo působením tlaku záření, tj. výměnou hybnosti mezi fotony a klasickým plynem.

Společným zobecněním klasické kinetické teorie a kinetického popisu fotonového plynu je relativistická kinetická teorie zahrnující i případy 'mírně' relativistického plynu. Toto zobecnění nachází často aplikace v relativistické astrofyzice. Především proto, ale také pro krásu s tím spojené matematiky, budeme tuto teorii v formulovat v kapitole 3.5 jako obecně relativistickou.

[1] Původně fenomenologicky zavedený hydrodynamický popis kontinua lze odvodit jako speciální aproximaci kinetického popisu. V širším smyslu slova však budeme (magneto-)hydrodynamikou rozumět okruh problémů spojených s pohybem kontinua i tehdy, kdy předpoklady k užití hydrodynamické aproximace v užším smyslu nejsou splněny.

[2] Četné aplikace se nabízejí v astrofyzice (hvězdné atmosféry, hvězdný vítr, mezihvězdná hmota, nitra hvězd, výbuchy supernov, kosmologie) i ve fyzice laboratorního plazmatu (laserová termonukleární fúze).

3.1 Klasická kinetická teorie plynu

3.1.1 Kinetická rovnice

Vyšetřujme nejprve pravděpodobnost obsazení f^i v systému s konečným počtem stavů $\{i|_{i=1}^n\}$ (např. excitační stavy elektronu v atomu vodíku). Pro časový vývoj obsazení stavů nekvantového systému[3] platí tzv. kinetická rovnice

$$\frac{d}{dt} f^i = \sum_j (P_{ji} f^j - P_{ij} f^i) \,, \tag{3.1}$$

kde P_{ij} je pravděpodobnost přechodu systému ze stavu i do stavu j za jednotku času. V důsledku symetrie kvantově mechanického popisu vůči inverzi času platí (pro přechod mezi elementárními kvantovými stavy) princip vratnosti

$$P_{ij} = P_{ji} \,, \tag{3.2}$$

a v důsledku zachování energie (a tedy homogenity v čase) jsou možné přechody pouze mezi stavy se stejnou energií E^i,

$$P_{ij} \sim \delta(E^i - E^j) \,. \tag{3.3}$$

To platí pro izolovanou soustavu. Pokud je soustava v interakci s vnější soustavou ('tepelným rezervoárem'; např. s kinetickými stupni volnosti okolních vodíkových atomů, nebo s polem záření) popsanou obsazovacími čísly F^k ve svých stavech, musíme vyjít z rovnice (3.1) pro sjednocení obou podsoustav

$$\frac{d}{dt}(f^i F^k) = \sum_{jl} (P_{jl,ik} f^j F^l - P_{ik,jl} f^i F^k) \,. \tag{3.4}$$

Pouze pro toto sjednocení nyní platí vratnost i zachování energie ($P_{ik,jl} = P_{jl,ik} \sim \delta(E^i + E^k - E^j - E^l)$). Jestliže rezervoár můžeme považovat za stacionární, $\frac{d}{dt}F^k = 0$, pak vystředováním rov. (3.4) přes rozdělení F^k dostaneme formálně opět rov. (3.1), kde ovšem pravděpodobnosti přechodu sledované podsoustavy

$$P_{ji} \equiv \frac{\sum_{kl} P_{jl,ik} F^l}{\sum_m F^m} \,, \qquad P_{ij} \equiv \frac{\sum_{kl} P_{ik,jl} F^k}{\sum_m F^m} \,, \tag{3.5}$$

samostatně nesplňují ani (3.2) ani (3.3). Pokud naše sledovaná soustava interaguje současně s více vnějšími soustavami (např. opět excitační stupně volnosti se zářením i srážkově s nalétávajícími částicemi), můžeme celkové pravděpodobnosti přechodu zapsat jako součet příspěvků od jednotlivých procesů ($P_{ij} = P_{ij}^{\mathrm{rad}} + P_{ij}^{\mathrm{col}}$).

Rovnice (3.1) můžeme integrovat v čase, přičemž vycházíme ze zvolených počátečních podmínek, nebo můžeme hledat jejich stacionární řešení, $\frac{d}{dt} f^i = 0$, ke kterému by měly asymptoticky vést. V tom případě se redukují na soustavu lineárních algebraických rovnic statistické rovnováhy

$$0 = \sum_j (P_{ji} f^j - P_{ij} f^i) \,. \tag{3.6}$$

Tato soustava je homogenní a protože vzhledem ke svému fyzikálnímu smyslu má mít netriviální řešení, musí být singulární (což vyplývá i z rov. (3.2)). Proto k ní musíme doplnit normovací podmínku, např.

$$\sum_i f^i = 1 \,. \tag{3.7}$$

[3] V odstavci 3.2.2 se budeme zabývat modifikací tohoto vztahu pro kvantový případ fermionové nebo bosonové povahy systému. To může být důležité např. pro volné stavy elektronů v plazmatu. Pro diskrétní stavy ovšem zpravidla předpokládáme jediný elektron v poli jádra, resp. statistiku excitací vzájemně nezávislých iontů.

Jak si ukážeme v odstavci 3.3, v termodynamické rovnováze je obsazení jednotlivých stavů dáno jistými funkcemi jejich energie, parametrizovanými teplotou. Rovnovážnému rozdělení se stejnou teplotou musí odpovídat všechny vzájemně interagující stupně volnosti všech částic. Jestliže některý z nich má odlišné rozdělení, může způsobit odchylky od rovnováhy i ostatních stupňů volnosti. Pokud pravděpodobnosti přechodů mezi různými stavy jistého podsystému jsou mnohem větší než jeho interakce s ostatními (např. nerovnovážnými) podsystémy, může se ustavit jeho vnitřní rozdělení velmi blízké rovnovážnému s takovou teplotou, při které je splněna jeho energetická rovnováha s ostatními podsystémy. Takový předpoklad může podstatně snížit počet neznámých v soustavě kinetických rovnic a tím zjednodušit její řešení. Pro stavy, jejichž interakci s nerovnovážnými podsystémy nelze zanedbat, je třeba vyjádřit všechny pravděpodobnosti přechodů (tzv. 'rate(s)') a řešit pro ně kinetické rovnice.

Příkladem mohou být hvězdné atmosféry, kde srážky mezi kinetickými stupni volnosti zpravidla dosti dobře zabezpečují ustavení termodynamické rovnováhy s kinetickou teplotou, která je ovšem závislá na hloubce v atmosféře (tzv. lokální termodynamická rovnováha, LTE). Naproti tomu záření je spektrálně i směrově odlišné od Planckova rovnovážného záření černého tělesa, protože z hlubších vrstev s vyšší teplotou přichází teplejší a z vnějších vrstev chladnější záření a tyto odchylky jsou větší ve frekvencích, ve kterých má atmosférický materiál menší opacitu a tedy větší střední volnou dráhu fotonů. Excitační stupně volnosti interagují srážkově s kinetickými stupni volnosti, čímž se jejich rozdělení přibližuje LTE, ale současně zářivé přechody (zejména v nejsilnějších čarách) mohou tuto rovnováhu narušovat a způsobovat NLTE ('non-LTE') rozdělení především základní a nejnižších excitovaných hladin vzhledem ke kontinuu a jeho kinetické teplotě. Protože prostřednictvím přeskoků do těchto nerovnovážných hladin se také vyměňuje energie mezi kinetickými stupni volnosti a zářením, může výsledek řešení NLTE podstatně ovlivnit i prostorovou závislost teploty těch stupňů volnosti, které v LTE jsou.

Ještě extrémnějším případem je statistická rovnováha okolohvězdné a mezihvězdné hmoty, kde díky nízké hustotě a tedy malému vzájemnému rušení mají ionty velký počet diskrétních hladin. Jejich obsazení je dominováno interakcí se zářením centrálních (pro planetární mlhoviny) či okolních hvězd. Toto záření mívá spektrum odpovídající teplotám řádu 10^4K, ale díky velkému zředění hustotu odpovídající teplotám řádu pouze $10^{1\pm1}$K. V rovnici statistické rovnováhy proto zpravidla převažují členy fotoinizace ze základní (nejpopulovanější) hladiny, rekombinace do vyšších hladin a deexcitace, tj. postupné kaskádování zpět do nižších hladin.

3.1.2 Boltzmannova rovnice

Předpokládejme, že plyn se skládá z velkého počtu (N) částic jednoho druhu, jejichž stav je popsán souřadnicemi x^i a hybnostmi p_i ($i = 1,2,3$). Stav plynu lze potom popsat tzv. jednočásticovou rozdělovací funkcí $f = f(t, x^i, p_i)$ udávající počet částic v jednotkovém objemu fázového prostoru

$$d^6N = f(t, x^i, p_i)d^3xd^3p \,. \tag{3.8}$$

Za jednotku fázového objemu můžeme zvolit objem elementárního kvantového stavu ($d^6\Gamma = (dxdp)^3 \sim h^3$) a f potom bude znamenat pravděpodobnost obsazení stavu.

Z jednočásticové rozdělovací funkce f můžeme vypočítat některé makroskopické veličiny charakterizující plyn. Z nich nejdůležitější jsou hustota částic n (hmoty ρ), hustota hybnosti π (rychlost v) a složky tenzoru napětí T (vůči souřadnicové soustavě, resp. τ vůči vlastní klidové soustavě plynu), tj. složky tenzoru energie-hybnosti, které jsou dány jako momenty f

$$n = \rho/m \quad = \quad \langle f \rangle \equiv \int f d^3p \tag{3.9}$$

$$\pi^i = \rho v^i \quad = \quad \langle p_i f \rangle \equiv \int p_i f d^3 p \tag{3.10}$$

$$m T^{ij} = m(\rho v^i v^j + \tau^{ij}) \quad = \quad \langle p_i p_j f \rangle \equiv \int p_i p_j f d^3 p \, , \tag{3.11}$$

kde m je hmotnost jedné částice. Ze stopy tenzoru napětí můžeme vypočítat i hustotu kinetické energie (nerelativistických částic)

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(T) = \frac{1}{2}\rho v^2 + \varepsilon_0 = \langle \frac{1}{2m} p_i p_i f \rangle \equiv \int \frac{p^2}{2m} f d^3 p \, , \tag{3.12}$$

kde $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\sum_i \tau^{ii}$ je hustota tepelné energie.

Všimněme si, že zatím co veličiny n, ρ, π a T jsou lineární funkcionály rozdělovací funkce f, veličiny v a τ častěji užívané v hydrodynamickém popisu (místo π a T) jsou nelineární.

Pohyb každé částice lze popsat trajektoriemi $x = x(t)$, $p = p(t)$ ve fázovém prostoru (viz např. obr. 3.1.a). Jestliže částice nemohou s časem vznikat ani zanikat a jestliže platí tzv. Liouvilleův teorém[4]

$$\frac{1}{\Gamma}\frac{d\Gamma}{dt} = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial x^i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i}\right) = 0 \, , \tag{3.13}$$

tj. fázový objem je invariantem pohybu, pak je také f invariantem pohybu a platí pro něj bezesrážková Boltzmannova rovnice

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dx^i}{dt}\frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{dp_i}{dt}\frac{\partial f}{\partial p_i} = 0 \, . \tag{3.14}$$

Speciálním, ale přitom dosti obecným, případem kdy platí Liouvilleův teorém (3.13) je případ hamiltonovského pohybu popsaného kanonickými pohybovými rovnicemi

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \, , \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i} \, . \tag{3.15}$$

Pak totiž

$$\frac{1}{\Gamma}\frac{d\Gamma}{dt} = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial x^i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i}\right) = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial x^i} - \frac{\partial^2 H}{\partial x^i \partial p_i}\right) = 0 \, . \tag{3.16}$$

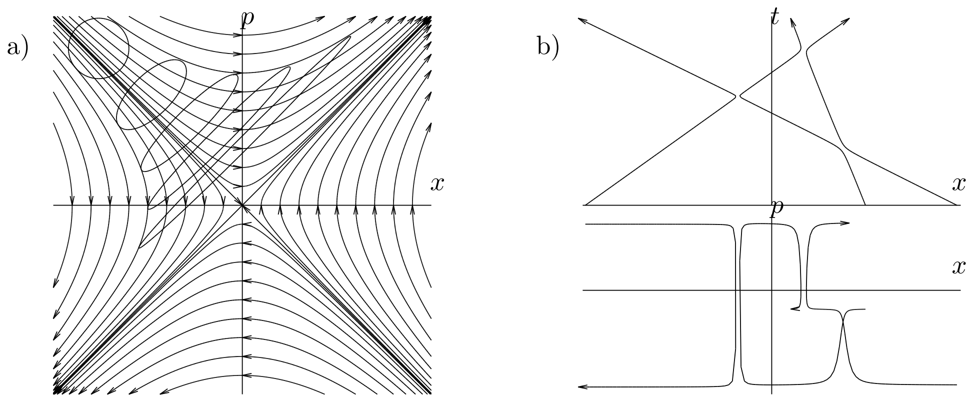
Boltzmannovu rovnici (3.14) lze v tom případě zapsat také pomocí Poissonových závorek

$$\frac{\partial f}{\partial t} - [H, f] = 0 \, . \tag{3.17}$$

Pohyb každé částice je obecně určen jednak působením vnějších polí ale i vzájemnou interakcí s ostatními částicemi plynu. Hamiltonián každé částice je tedy závislý i na stavech ostatních částic a pohybové rovnice (3.15) všech N částic jsou vzájemně svázané. V tom případě je invariantní pouze fázový objem $d^{6N}\Gamma$ v prostoru stavů celého systému N částic a místo rovnice (3.17) platí pouze rovnice

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} - [H_N, f_N] = 0 \, , \tag{3.18}$$

[4] Při jednoparametrické grupě transformací $\xi = \xi(t, \xi_0)$ v N-dim prostoru se totiž objem $\Gamma = \int d^N \xi = \int |\frac{\partial \xi}{\partial \xi_0}| d^N \xi_0$ mění $\dot{\Gamma} = \int \frac{d}{dt} |\frac{\partial \xi}{\partial \xi_0}| d^N \xi_0 = \int \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\frac{\partial \xi(t+\Delta t)}{\partial \xi(t)}| - |\mathbf{1}|}{\Delta t} |\frac{\partial \xi(t)}{\partial \xi_0}| d^N \xi_0 = \int \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \dot{\xi}^i}{\partial \xi^i} |\frac{\partial \xi}{\partial \xi_0}| d^N \xi_0 = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \dot{\xi}^i}{\partial \xi^i} \Gamma$ (viz spec. rov. (3.42) a pro relativistické zobecnění rov. (3.202)).



Obrázek 3.1: Fázové trajektorie. Jednorozměrný pohyb a) neinteragujících částic ve vnějším poli potenciálové bariéry $\Phi(x) = -x^2$, b) volných částic interagujících $\Phi_{\mathrm{int.}}(x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{B}}) = (x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{B}})^{-2}$.

pro N-částicovou rozdělovací funkci $f_N = f_N(x_1, ..., x_N, p_1, ..., p_N, t)$ reprezentující pravděpodobnost výskytu celého systému v daném stavu, resp. počet systémů z nějakého velkého souboru systémů, které jsou v daném stavu. Pro K částic ($K = 1, ..., N-1$) můžeme zavést K-částicovou rozdělovací funkci

$$f_K(x_1, ..., x_K, p_1, ..., p_K, t) = \int f_N(x_1, ..., x_N, p_1, ..., p_N, t) \prod_{i=K+1}^{N} d^3x_i d^3p_i \; , \tag{3.19}$$

vyjadřující pravděpodobnost jejich výskytu v jistém stavu z $6K$-dimenzionálního podprostoru prostoru stavů všech částic bez ohledu na stav zbývajících $N-K$ částic (předpokládáme implicitně, že všechny částice jsou stejného druhu a záměna stavů každé dvojice je nerozlišitelná).

Hamiltonián H_N můžeme zpravidla považovat za součet jednočásticových hamiltoniánů H_1 jednotlivých částic pohybujících se nezávisle ve vnějších a kolektivních polích a dvoučásticových (popřípadě několika málo více částicových) interakčních hamiltoniánů Φ, vyjadřujících vzájemnou interakci pro každou dvojici částic

$$H_N(x_1, ..., x_N, p_1, ..., p_N) = \sum_{i=1}^{N} H_1(x_i, p_i) + \sum_{i<j} \Phi(x_i, x_j, p_i, p_j) \; . \tag{3.20}$$

Vyintegrováním rovnice (3.18) přes stavy částic $i = K+1, ..., N$ (analogicky definici (3.19)) dostaneme pohybovou rovnici pro f_K. Integrací per partes

$$\begin{aligned} \int [H_1, f_N]\, dx_i dp_i &= \int \left(\frac{\partial H_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_N}{\partial p_i} - \frac{\partial H_1}{\partial p_i} \frac{\partial f_N}{\partial x_i} \right) dx_i dp_i \\ &= \int \left[\frac{\partial H_1}{\partial x_i} f_N \right]_{p_i=-\infty}^{+\infty} dx_i - \int \left[\frac{\partial H_1}{\partial p_i} f_N \right]_{x_i=-\infty}^{+\infty} dp_i = 0 \end{aligned} \tag{3.21}$$

se lze přesvědčit, že příspěvky jednočásticových hamiltoniánů $H_1(x_i, p_i)$ pro $i > K$ jsou nulové. Analogicky se vyruší i příspěvky interakčních hamiltoniánů $\Phi_{i,j}$ pro $K < i < j$. Všechny interakční členy s pro $i \le K < j$ jsou dohromady $N-K$ násobkem členu s $j = K+1$ a zbylé členy jednočásticové i interakční s $i, j \le K$ dávají analogicky (3.20) hamiltonián H_K soustavy K částic. Pohybová rovnice pro f_K má tedy tvar

$$\frac{\partial f_K}{\partial t} - [H_K, f_K] = (N-K) \sum_{i=1}^{K} \int [\Phi_{i,K+1}, f_{K+1}]\, d^3x_{K+1} d^3p_{K+1} \; . \tag{3.22}$$

Tyto rovnice pro různá K tvoří tzv. hierarchii BBGKY.[5] První rovnice z této soustavy

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} - [H_1, f_1] = (N-1)\int [\Phi_{1,2}, f_2]\, d^3x_2 d^3p_2 \tag{3.23}$$

je analogicky (3.17) jednočásticová Boltzmannova rovnice na jejíž pravé straně však stojí příspěvek dvojčásticové rozdělovací funkce. Pro tu platí rovnice

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} - [H_2, f_2] = (N-2)\sum_{i=1}^{2}\int [\Phi_{i,3}, f_3]\, d^3x_3 d^3p_3 \ , \tag{3.24}$$

atd. Pravou stranu rovnice (3.23) lze chápat rovněž jako změnu jednočásticové rozdělovací funkce v důsledku vzniku nebo zániku částice v daném stavu v důsledku její interakce (srážky) s ostatními částicemi. Mezi srážkami se každá částice pohybuje nezávisle na ostatních (viz obr.3.1.b – nahoře) podle rovnic (3.15), kde hamiltonián je již závislý pouze na souřadnicích dané částice (vnější a kolektivní pole vstupují do hamiltoniánu pouze jako parametry) a tedy jednočásticový fázový objem se zachovává. Srážka, jejíž pravděpodobnost je dána jednočásticovou rozdělovací funkcí druhé interagující částice (pokud jsou stavy různých částic nezávislé, nebo dvojčásticovou rozdělovací funkcí, pokud jsou jejich stavy korelované), se projeví jako přechod sledované částice na jinou fázovou trajektorii (viz obr.3.1.b – dole), tj. jako zánik částice na její původní trajektorii a vznik na nové trajektorii (popřípadě pouze zánik nebo pouze vznik, jestliže jde o nepružnou srážku či chemickou reakci, při které se změní typ vstupujících částic). Působení srážek je zahrnuto do Boltzmannovy rovnice pomocí tzv. srážkového členu na pravé straně, která vyjadřuje pravděpodobnost vzniku částice (se záporným znaménkem též zániku),

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dx^i}{dt}\frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{dp_i}{dt}\frac{\partial f}{\partial p_i} = \left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_{\mathrm{c}} \ . \tag{3.25}$$

3.1.3 Klasická teorie přenosu záření

Ve fyzikální interpretaci (3.9) až (3.12) momentů f jsme předpokládali, že popisujeme pouze nerelativistické částice. Víme však, že i foton má svoji hybnost

$$\vec{p} = \frac{h\nu}{c}\vec{n} \ , \tag{3.26}$$

kde ν je jeho frekvence a $\vec{n}$ jednotkový vektor ve směru pohybu. Pole záření bývá zvykem popisovat specifickou intenzitou I_ν udávající zářivou energii dE, která projde jednotkovou plochou d^2S kolmou k $\vec{n}$ za jednotkový čas dt do jednotkového prostorového úhlu $d^2\Omega$ v jednotkovém frekvenčním intervalu $d\nu$. Tyto fotony ovšem zaujímají objem $d^3p = p^2 dp\, d^2\Omega = h^3\nu^2/c^3\, d\nu\, d^2\Omega$ v hybnostním prostoru a plochou d^2S projdou ty, které se nacházejí ve válci objemu $d^3x = cdt\, d^2S$, přičemž každý nese energii $h\nu$. Prošlou energii tedy můžeme vyjádřit také pomocí rozdělovací funkce f fotonů

$$dE = I_\nu\, d^2S\, dt\, d^2\Omega\, d\nu = h\nu \sum f(p)\, d^3x\, d^3p/h^3 \ , \tag{3.27}$$

kde se sčítá přes obě polarizace fotonu. Odtud dostáváme vztah specifické intenzity a rozdělovací funkce fotonů

$$I_\nu(t, x, \vec{n}) = \frac{2h\nu^3}{c^2} f(t, x, p) \ . \tag{3.28}$$

[5] Bogoljubov, Born, Green, Kirkwood, Yvon – podrobněji viz [9].

Vzhledem k odlišnému vztahu rychlosti, hybnosti a energie u relativistických a ultrarelativistických částic je pro ně třeba upravit fyzikální interpretaci momentů f. Číselná hustota fotonů (obou polarizací) je dána analogicky (3.9) vztahem

$$n_r = 2\int f\frac{d^3p}{h^3} = \int \frac{1}{ch\nu} I_\nu d\nu d^2\Omega \ , \tag{3.29}$$

z makroskopického hlediska je však významnější hustota zářivé energie

$$\varepsilon_r = 2\int h\nu f\frac{d^3p}{h^3} = \frac{1}{c}\int I_\nu d\nu d^2\Omega \ , \tag{3.30}$$

což je analogie (3.12) pro ultrarelativistické částice (pro které energie $E = pc$). Hustota hybnosti pole záření π_r^i je úměrná hustotě toku zářivé energie

$$F_r^i = c^2\pi_r^i = 2\int h\nu n^i cf\frac{d^3p}{h^3} = \int n^i I_\nu d\nu d^2\Omega \ , \tag{3.31}$$

a tenzor napětí (tlak) záření, tj. hustota toku hybnosti je podobně (3.11)

$$T_r^{ij} = 2\int h\nu n^i n^j f\frac{d^3p}{h^3} = \frac{1}{c}\int n^i n^j I_\nu d\nu d^2\Omega \ . \tag{3.32}$$

Rovněž transformační vlastnosti při přechodu k jinému inerciálnímu systému jsou odlišné pro relativistický a nerelativistický plyn a podrobněji se jimi budeme zabývat v kapitole 3.5. Jestliže však známe pohybové rovnice fotonu, které např. v kartézských souřadnicích ve vakuu mají jednoduchý tvar $\dot{\vec{x}} = c\vec{n}$, $\dot{\vec{p}} = 0$, který zjevně splňuje Liouvilleův teorém, pak i pro rozdělovací funkci fotonů platí Boltzmannova rovnice (3.25), kterou můžeme podle (3.28) přepsat pomocí I_ν jako tzv. rovnici přenosu záření

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I_\nu}{\partial t} + n^i\frac{\partial I_\nu}{\partial x^i} = \left(\frac{\delta I_\nu}{c\,\delta t}\right)_{\mathrm{c}} \ . \tag{3.33}$$

Její integrací přes prostor hybností dostaneme rovnici kontinuity energie záření

$$\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_r + \frac{\partial}{\partial x^i}F_r^i = \int \left(\frac{\delta I_\nu}{c\,\delta t}\right)_{\mathrm{c}} d\nu d^2\Omega \ , \tag{3.34}$$

a jejím vynásobením n^k/c a integrací rovnici kontinuity hybnosti záření

$$\frac{\partial}{\partial t}\pi_r^k + \frac{\partial}{\partial x^i}T_r^{ki} = \int \frac{n^k}{c}\left(\frac{\delta I_\nu}{c\,\delta t}\right)_{\mathrm{c}} d\nu d^2\Omega \ . \tag{3.35}$$

V křivočarých souřadnicích se modifikuje závislost $\dot{x}^i = \dot{x}^i(\vec{n}) = h^i_j n^j$, kde $h^i_j = h^i_j(x)$ jsou metrické koeficienty dané vztahem zpravidla ortonormální báze, v níž složky $\vec{n}$ vyjadřujeme, k souřadnicové bázi.[6] Také $\dot{n}^i \neq 0$, takže podobnost rovnice přenosu záření s Boltzmannovou rovnicí (3.25) je ještě nápadnější. V diferenciálně se pohybujícím prostředí se obecně mění dopplerovsky i ν a $\vec{n}$ je navíc ovlivněno i aberací. V kapitole 3.5 uvidíme, že f je – na rozdíl od I_ν – lorentzovsky invariantní.[7] Rovnice přenosu záření má v tom případě obecný tvar

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I_\nu}{\partial t} + h^i_j n^j\frac{\partial I_\nu}{\partial x^i} + \sum_{(i)=1}^{2}\frac{dn^{(i)}}{c\,dt}\frac{\partial I_\nu}{\partial n^{(i)}} + \frac{d\nu}{c\,dt}\nu^3\frac{\partial(\nu^{-3}I_\nu)}{\partial\nu} = \left(\frac{\delta I_\nu}{c\,\delta t}\right)_{\mathrm{c}} \ , \tag{3.36}$$

[6] Metrické koeficienty dávají alternativní vyjádření metriky g_{ik}, neboť $1 = g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k = g_{ik}h^i_j h^k_l n^j n^l = \delta_{jl}n^j n^l$.

[7] Proto specifická intenzita se transformuje jako $I'_\nu = (\nu'/\nu)^3 I_\nu$, celková intenzita $I = \int_0^\infty I_\nu d\nu$ jako $I'/I = (\nu'/\nu)^4$, a např. efektivní teplota záření $T_{\mathrm{ef.}} \sim I^{\frac{1}{4}}$ jako $T'_{\mathrm{ef.}}/T_{\mathrm{ef.}} = \nu'/\nu$, jak pozorujeme např. u dipólové anizotropie reliktního záření.

kde ve třetím členu derivujeme a sčítáme pouze přes dva nezávislé směrové kosiny nebo jiné parametry úhlové závislosti $I_\nu(\vec{n})$. Protože tento zápis je méně přehledný a přitom svojí podstatou ekvivalentní (3.25), je obecně přirozenější vycházet rovnou z Boltzmannovy rovnice. V mnohých případech očekávané symetrie řešení (např. slabé úhlové a výrazné frekvenční závislosti rozdělovací funkce) ovšem může být výhodná volba sférických souřadnic v prostoru hybností, kterou ν a $\vec{n}$ reprezentují.

Cvičení 2 *Odvoďte konkrétní tvar rovnice přenosu záření ve statických sférických souřadnicích pro obecné i sféricky symetrické pole záření.*

Srážkový člen na pravé straně rovnice přenosu (3.33) bývá zpravidla vyjádřen ve tvaru

$$\left(\frac{\delta I_\nu}{c\,\delta t}\right)_{\mathrm{c}} = \alpha_\nu (S_\nu - I_\nu)\ , \tag{3.37}$$

kde opacita $\alpha_\nu \equiv \kappa_\nu \rho$ (resp. specifická opacita κ_ν) udává pravděpodobnost absorpce fotonu na jednotkové dráze (a bývá dána součinem číselné hustoty absorbujících částic a jejich účinného průřezu) a vydatnost S_ν vyjadřuje příspěvek emitovaného (a rozptýleného) záření v daném směru a frekvenci. Opacitu a vydatnost v klidovém systému prostředí lze často považovat za izotropní. V tom případě lze rovnici (3.35) pro gradient tlaku záření zjednodušeně zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}\pi_r^k + \frac{\partial}{\partial x^i} T_r^{ki} = -\frac{\bar{\alpha}}{c} F_r^k\ , \tag{3.38}$$

kde $\bar{\alpha} \equiv \int \alpha_\nu F_\nu^k d\nu / \int F_\nu^k d\nu$ je efektivní opacita.

3.1.4 Fenomenologická hydrodynamika a zářivá hydrodynamika

Hydrodynamický popis kapalin i plynů bývá zpravidla odvozován z fenomenologické představy kontinua, jehož fyzikální charakteristiky jako hustota ρ, rychlost $\vec{v}$ atd. jsou funkcemi času t a polohy popsané zvolenými 'Eulerovými' souřadnicemi x ($f = f(t,x)$). Vývoj kontinua je pak dán parciálními diferenciálními rovnicemi pro tyto veličiny. V tomto kontinuu je možné určit identitu jeho libovolné části a sledovat její pohyb $x = x(t, x_0)$, kde x_0 jsou ('co-moving', tj. souběžné) 'Lagrangeovy' souřadnice, přičemž pole rychlosti je dáno

$$v = \frac{\partial}{\partial t} x(t, x_0)\ . \tag{3.39}$$

Pohybové rovnice lze převést z eulerovského do lagrangeovského popisu zavedením 'proudové' časové derivace

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (v\nabla)\ . \tag{3.40}$$

Zvolíme-li jistou oblast Ω_0 lagrangeovských souřadnic, pak její objem v čase t je dán

$$V(t) = \int_\Omega d^3x = \int_{\Omega_0} \left| \frac{\partial x(t,x_0)}{\partial x_0} \right| d^3x_0\ . \tag{3.41}$$

Proudová derivace objemu je (srov. pozn. 4 na str. 24)

$$\frac{d}{dt}V(t) = \int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial t} \left| \frac{\partial x(t,x_0)}{\partial x_0} \right| d^3x_0 = \int_{\Omega_0} \sum_i \frac{\partial v^i}{\partial x^i} \left| \frac{\partial x(t,x_0)}{\partial x_0} \right| d^3x_0 = \int_\Omega (\nabla v) d^3x \simeq V.(\nabla v) \tag{3.42}$$

(kde jsme v každém členu rozderivovaného determinantu užili úpravy $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x^i}{\partial x_0^j} = \frac{\partial v^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x_0^j}$, poslední rovnost platí pro infinitesimálně malé oblasti Ω). Předpokládáme-li tedy, že celková hmotnost $M = \rho V$ této oblasti se zachovává, pak odtud dostaneme rovnici kontinuity v lagrangeovském resp. eulerovském tvaru

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla v) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho v) = 0\ . \tag{3.43}$$

Podobně, předpokládáme-li, že celková změna hybnosti je dána sílou (tlakovou i objemovou) působící na element kontinua, dostaneme pohybovou 'Navierovu – Stokesovu rovnici'

$$\rho\frac{dv}{dt} \equiv \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v\nabla)v\right) = f - \nabla P\ , \tag{3.44}$$

kde f je nyní objemová hustota síly (např. $-\rho\nabla\Phi$ v případě skalárního potenciálu) a P je tlak (nebo anizotropní tenzor napětí pro viskozní kontinuum). Velikost tlaku je zpravidla určena zvolenou stavovou rovnicí (např. pro ideální plyn)

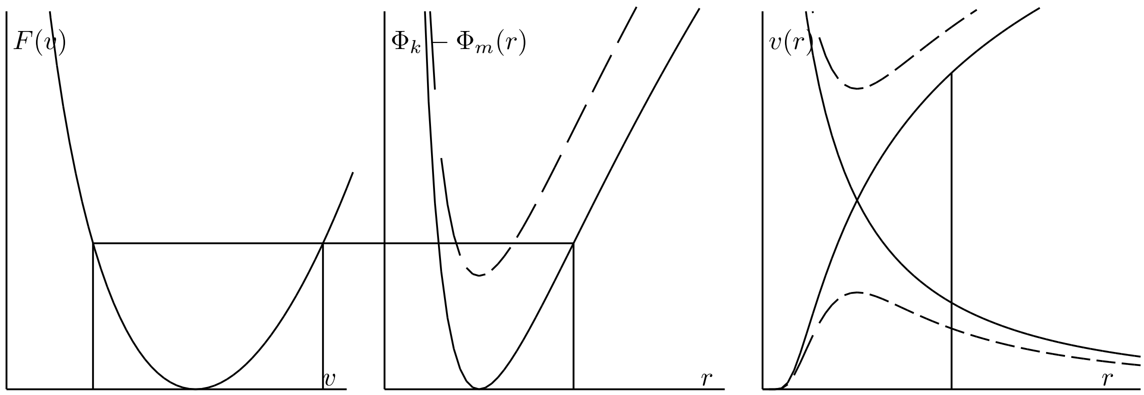
$$P = P(\rho, T) \sim nkT\ . \tag{3.45}$$

Teplota T, která souvisí s hustotou tepelné energie (např. $\varepsilon \sim \frac{3}{2}nkT$ pro ideální plyn), je buď dána termodynamickou rovnováhou s jistou tepelnou lázní (např. polem záření), nebo musí být řešena z rovnice energetické rovnováhy. Při konstruování této rovnice je třeba vzít v úvahu, že ke změně tepelné energie pohybujícího se elementu plynu přispívá (kromě ostatních procesů s výkonem $\dot{E}$) i práce vykonaná stlačováním proti jeho tlaku, $\frac{d}{dt}(\varepsilon V) = \dot{E} - P\frac{dV}{dt}$. Například pro ideální plyn tak tato rovnice bude mít tvar

$$\frac{d}{dt}\varepsilon + \frac{5}{3}\varepsilon(\nabla v) = \dot{\varepsilon}\ , \tag{3.46}$$

kde na pravé straně vystupuje objemová hustota výkonu ostatních procesů, např. termonukleárních reakcí, energie absorbované ze záření (kterou lze určit z řešení rovnice přenosu záření), nebo divergence toku tepelné energie proudícího vedením.

Zářivá hydrodynamika je obor problémů dynamiky kontinua (zpravidla plynu), která je podstatně ovlivněna interakcí se zářením. Toto ovlivnění může být na různých úrovních. Nejčastěji zářivé členy vystupují jako zdroje (nebo ztráty) v rovnici energetické rovnováhy, tedy jako jeden ze zdrojů $\dot{\varepsilon}$ na pravé straně rov. (3.46). Tím, že záření ohřívá nebo ochlazuje plyn, mění jeho teplotu a tlak, a tím ovlivňuje jeho dynamiku. Tlak plynu může být změněn i fotoionizací (nebo fotodisociací), která změní v rov. (3.45) při konstantní hustotě hmoty ρ střední hmotnost volné částice a číselnou hustotu částic n. Záření však může mít i přímý dynamický účinek. Tím, že každý foton nese hybnost úměrnou své energii, může měnit hustotu hybnosti (a tedy přímo rychlostní pole) částic plynu nejen při absorpci a emisi, ale i při rozptylu. Tento zdroj hybnosti vystupuje na pravé straně rov. (3.44) buď jako hustota síly a nebo (podle rovnice přenosu záření ekvivalentně) jako gradient tlaku záření neseného polem záření. Řešení úloh zářivé hydrodynamiky zpravidla vyžaduje kromě řešení dynamických rovnic plynu uvedených v tomto odstavci i řešení rovnice přenosu záření uvedené v odstavci 3.1.3. Rovnice přenosu v pohybujícím se prostředí je ovšem značně komplikovaná, zejména pokud rychlosti plynu nejsou zanedbatelné vůči rychlosti světla. Pak totiž absorpční a emisní koeficienty (vůči nehybné vztažné soustavě) závisí na směru fotonu i plynu. Tuto potíž můžeme zpravidla obejít přechodem k souběžným souřadnicím (nebo alespoň co-moving vztažné tetrádě, která nemusí být souřadnicová), čímž se ovšem naopak zkomplikuje levá strana rovnice přenosu. V obou případech potřebujeme transformovat veličiny vztahující se k ultrarelativistickým částicím (fotonům) mezi různými inerciálními soustavami (byť třeba se vzájemnými rychlostmi zcela nerelativistickými). Tyto transformace je třeba buď provést lorentzovsky invariantně a pak



Obrázek 3.2: Sféricky symetrický tok kontinua.

odvodit jejich nerelativistické aproximace, nebo alespoň postupovat velmi opatrně při intuitivním zanedbávání relativistických korekcí i při interpretaci získaných výsledků.

Radiální akrece a hvězdný vítr. Jako příklad aplikace klasické zářivé hydrodynamiky vypočtěme stacionární radiální tok prostředí s rychlostí $v^i = v(r)r^i/r$. Z eulerovského tvaru rovnice kontinuity (3.43)

$$0 = \nabla^i \left(\frac{\rho(r)v(r)}{r} r^i \right) = r^{-2} \frac{d}{dr} \left(\rho(r)v(r)r^2 \right) \tag{3.47}$$

potom vyplývá

$$\rho(r)v(r)r^2 = h \;, \tag{3.48}$$

kde h je tok hmoty do jednotkového prostorového úhlu konstantní pro všechna r (kladný pro výtok a záporný pro akreci). Pohybová rovnice (3.44) má nenulovou pouze radiální složku

$$\rho(r)v\frac{dv}{dr} = -\rho g - \frac{d}{dr}(P + P_r) \;, \tag{3.49}$$

kde g je gravitační zrychlení a P_r radiální složka tenzoru napětí pole záření (3.32), jejíž gradient lze vyjádřit podle (3.38) rovněž pomocí radiálního toku záření. Tlak plynu P je stavovou rovnicí (3.45) svázán s hustotou ρ a teplotou T. Známe-li teplotní režim, který může být dán interakcí s polem záření (např. jako izotermický) nebo může být adiabatický aj., pak je tlak P svázán s hustotou ρ, kterou lze pomocí (3.48) vyjádřit pomocí rychlosti v, pro kterou tak dostáváme jedinou diferenciální rovnici

$$\left(v - \frac{kT}{m}\frac{1}{v} \right) \frac{dv}{dr} = -g - r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{kT}{mr^2} \right) + \frac{\bar{\kappa}}{c} F_r \;. \tag{3.50}$$

Její integrací dostáváme implicitní algebraickou rovnici pro v ve tvaru

$$F(v) = \Phi_k - \Phi_m(r) \;, \tag{3.51}$$

kde např. pro izotermický případ má funkce $F(v)$ na levé straně tvar

$$F(v) = \frac{1}{2}(v^2 - v_k^2) - \frac{kT}{m} \ln \left| \frac{v}{v_k} \right| \tag{3.52}$$

s minimem rovným nule v kritickém bodě

$$v_k = \sqrt{\frac{kT}{m}} \; . \tag{3.53}$$

Na pravé straně rovnice (3.51) je modifikovaný potenciál $\Phi_m(r)$, který má v izotermickém případě (a při konstantní efektivní specifické opacitě) tvar

$$\Phi_m(r) = \int \left(g - 2\frac{kT}{mr} - \frac{\bar{\kappa}}{c} F_r \right) dr = -\frac{GM}{r} - 2\frac{kT}{m} \ln(r) + \frac{\bar{\kappa} L}{4\pi c r} \; , \tag{3.54}$$

opět s extrémem v kritickém bodě

$$r_k = \frac{m}{2kT} \left(GM - \frac{\bar{\kappa} L}{4\pi c} \right) \; , \tag{3.55}$$

kde G je gravitační konstanta, M hmotnost tělesa a $L = 4\pi r^2 F_r$ jeho luminosita. Aby existovalo řešení $v(r)$ pro všechna r, musí integrační konstanta $\Phi_k \geq \Phi_m(r_k)$. Pokud $\Phi_k > \Phi_m(r_k)$, existují dvě řešení, jedno s rychlostí podkritickou a druhé s nadkritickou (viz přerušované čáry v obr. 3.2). V případě $\Phi_k = \Phi_m(r_k)$ jsou tato řešení v kritickém bodě propojena, takže lze vybrat řešení hvězdného větru, které je asymptoticky pro $r \to 0$ statické a pro $r \to \infty$ dynamické, nebo řešení radiální akrece, u kterého je tomu naopak a jehož rychlost je záporná (viz plné čáry v obr. 3.2). Přitom předpokládáme, že záření tělesa je pod Eddingtonovou mezí (tj. $L < \frac{4\pi c}{\bar{\kappa}} GM$), čili že přitažlivý gravitační potenciál převládá nad odpudivým tlakem záření.

3.1.5 Momentové rovnice a hydrodynamická aproximace

Vypočteme-li momenty Boltzmannovy rovnice (3.25) v prostoru hybností, dostaneme parciální diferenciální rovnice pro momenty definované rovnicemi (3.9) až (3.11). Odvoďme si tyto rovnice pro jednoduchý případ částic ve skalárním potenciálovém poli, kdy hamiltonián

$$H = \frac{p^2}{2m} + m\Phi(x) \; , \tag{3.56}$$

podle (3.15) tedy

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{p_i}{m} \; , \qquad \frac{dp_i}{dt} = -m\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \; , \tag{3.57}$$

takže (3.25) má konkrétně tvar

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p_i}{m}\frac{\partial f}{\partial x^i} - m\frac{\partial \Phi}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial p_i} = \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_{\mathrm{c}} \; . \tag{3.58}$$

Nultý moment (tj. $\int d^3p$) této rovnice dává

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{m}\frac{\partial \pi^i}{\partial x^i} = \left(\frac{\delta n}{\delta t} \right)_{\mathrm{c}} \; , \tag{3.59}$$

kde na pravé straně je moment srážkového členu definovaný analogicky (3.9), který udává číselnou hustotu částic vzniklých srážkami za jednotku času (což musí být nula, pokud nedochází k chemickým reakcím). Integrál třetího členu na levé straně rovnice (3.58) je nulový, protože je to integrál derivace rozdělovací funkce f, která musí jít pro nekonečné p k nule, aby dávala konečnou hustotu. Přepíšeme-li tuto rovnici pomocí rychlosti v^i zavedené v (3.10), dostaneme známou rovnici kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v^i \frac{\partial \rho}{\partial x^i} + \rho \frac{\partial v^i}{\partial x^i} = \left(\frac{\delta \rho}{\delta t}\right)_{\mathrm{c}} . \tag{3.60}$$

První momenty rovnice (3.58) dostaneme vynásobením p^j a vyintegrováním (tj. $\int d^3pp^j$)

$$\frac{\partial \pi^j}{\partial t} + \frac{\partial T^{ji}}{\partial x^i} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} = \left(\frac{\delta \pi^j}{\delta t}\right)_{\mathrm{c}} . \tag{3.61}$$

Třetí člen na levé straně jsme upravili integrací per partes $\int p^j \frac{\partial f}{\partial p_i} = -\delta_i^j \int f$, na pravé straně je opět hustota hybnosti předaná srážkami za jednotku času (která musí být nulová, jestliže dochází pouze ke srážkám mezi částicemi téhož druhu). Kombinací s rovnicí kontinuity (3.60) odtud můžeme dostat pohybovou rovnici pro jednosložkový plyn ve tvaru obvyklejším v hydrodynamice

$$\rho \left(\frac{\partial v^j}{\partial t} + v^i \frac{\partial v^j}{\partial x^i}\right) + \frac{\partial \tau^{ji}}{\partial x^i} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} = \left(\frac{\delta \pi^j}{\delta t}\right)_{\mathrm{c}} - v^j \left(\frac{\delta \rho}{\delta t}\right)_{\mathrm{c}} . \tag{3.62}$$

Podobně pro druhé momenty rovnice (3.58) dostaneme (vyintegrováním $\int d^3pp^jp^k/m$) rovnici pro složky tenzoru napětí

$$\frac{\partial T^{jk}}{\partial t} + \frac{\partial Q^{ijk}}{\partial x^i} + \pi_j \frac{\partial \Phi}{\partial x^k} + \pi_k \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} = \left(\frac{\delta T^{jk}}{\delta t}\right)_{\mathrm{c}} , \tag{3.63}$$

kde na pravé straně je opět příspěvek srážkového členu ke změně tenzoru napětí. Tato rovnice obsahuje divergenci momentu vyššího řádu, a to toku složek tenzoru napětí (resp. energie, která je úměrná jeho stopě)

$$Q^{ijk} \equiv m^{-2} \langle p_i p_j p_k f \rangle . \tag{3.64}$$

Jestliže tenzor Q^{ijk} přepíšeme (analogicky (3.11)) pomocí transformace do vlastní klidové soustavy plynu (v níž by měl hodnotu q^{ijk})

$$Q^{ijk} = q^{ijk} + v^i \tau^{jk} + v^k \tau^{ij} + v^j \tau^{ki} + v^i v^j v^k \rho , \tag{3.65}$$

pak rovnici (3.63) můžeme užitím nižších momentových rovnic přepsat

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau^{jk}}{\partial t} + \frac{\partial q^{ijk}}{\partial x^i} + \frac{\partial (v^i \tau^{jk})}{\partial x^i} + \tau^{ki} \frac{\partial v^j}{\partial x^i} + \tau^{ji} \frac{\partial v^k}{\partial x^i} \; &= \\ = \left(\frac{\delta T^{jk}}{\delta t}\right)_{\mathrm{c}} + v^j v^k \left(\frac{\delta \rho}{\delta t}\right)_{\mathrm{c}} - v^j \left(\frac{\delta \pi^k}{\delta t}\right)_{\mathrm{c}} - v^k \left(\frac{\delta \pi^j}{\delta t}\right)_{\mathrm{c}} & . \end{aligned} \tag{3.66}$$

Momentové rovnice (3.59), (3.61), (3.63) a další lze zapsat jednotně zavedením momentů

$$M^\alpha = \langle p^\alpha f \rangle = \int p^\alpha f d^3p \tag{3.67}$$

zobecňujících definice (3.9), (3.10), (3.11), (3.64) a další, kde α je tzv. multi-index[8], jehož norma udává stupeň (řád) momentu. Obecný moment rovnice (3.58) má potom tvar

$$\frac{\partial}{\partial t} M^\alpha + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x^i} M^{\alpha+i} + m\alpha^i \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} M^{\alpha-i} = \left(\frac{\delta M^\alpha}{\delta t}\right)_{\mathrm{c}} , \tag{3.68}$$

[8] Multi-index α je vektorový index (vektor s celočíselnými složkami), pomocí kterého můžeme definovat mocninu

kde na pravé straně je příslušný moment srážkového členu. Vidíme tedy, že každá momentová rovnice vždy obsahuje i momenty vyššího řádu, takže tyto rovnice tvoří nekonečnou soustavu parciálních diferenciálních rovnic (ovšem v prostoru s nižší dimenzí než původní Boltzmannova rovnice, protože závislost rozdělovací funkce na hybnosti vlastně representujeme spočetnou posloupností momentů, z nichž lze tuto funkci v principu zpětně rekonstruovat).

Aby soustava momentových rovnic byla uzavřená, musíme některé z vyšších momentů apriorně vyjádřit pomocí nižších momentů. Můžeme například učinit nejjednodušší předpoklad, že f bude dáno rovnovážným maxwellovským rozdělením (srovnej rov. (3.144))

$$f = n(2\pi mkT)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{(p-mv)^2}{2mkT}\right) , \tag{3.69}$$

kde výška a střed gausovské křivky jsou v souhlase s (3.9) a (3.10) dány ρ a v, které musí splňovat pohybové rovnice (3.60) a (3.62). Podle (3.11) je pro rozdělení (3.69) tenzor napětí ve vlastní soustavě izotropní, úměrný teplotě rozdělení T,

$$\tau^{ij} = \delta^{ij} P = \delta^{ij} nkT = \delta^{ij} \frac{2\epsilon}{3} , \tag{3.70}$$

kde P je tlak a ϵ je hustota tepelné energie. Teplota může být předem zadaná (např. určená rovnováhou se zářením), nebo pro ni (resp. pro ϵ) ze stopy rovnice (3.66), kde tok tepla $q = 0$ v důsledku předpokladu (3.69), dostáváme rovnici energetické rovnováhy

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)\epsilon + \frac{5}{3}\epsilon \frac{\partial v^i}{\partial x^i} = \left(\frac{\delta \epsilon}{\delta t}\right)_{\mathrm{c}} . \tag{3.71}$$

Druhý člen na levé straně této rovnice udává změnu vnitřní energie v důsledku práce vykonané stlačováním plynu proti jeho tlaku. Srážkový člen na pravé straně by byl nulový pro adiabatický pohyb jednosložkového plynu, nebo může vyjadřovat příspěvek výměny energie s ostatními složkami nebo zářením — tento člen by v případě zářivé rovnováhy musel dominovat. Podobně i ostatní složky rovnice (3.66) mají význam kritéria oprávněnosti předpokladu (3.69) — srážkové členy na pravé straně musí být dostatečně dominantní aby zajistily relaxaci odchylek od rovnovážného rozdělení způsobovaných gradienty na levé straně.

Jestliže srážky nejsou dostatečně účinné aby zajistily platnost přiblížení (3.69), musíme do Boltzmannovy rovnice resp. jejích momentů pravou stranu dosadit a počítat odchylky skutečné rozdělovací funkce od (3.69). Skutečným tvarem srážkového členu se budeme zabývat v kapitole 3.2. Pro ilustraci jeho vlivu na řešení Boltzmannovy rovnice však můžeme vystačit se zjednodušeným 'BGK'- modelem (Bhatnagar, Gross, Krook [2], [20])

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_{\mathrm{c}} = -\frac{f - f_0}{\Delta t} , \tag{3.72}$$

---

p^α vektoru p

$$p^\alpha = \prod_{i=1}^{3} (p^i)^{\alpha^i} .$$

Jeho norma je definovaná vztahem

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{3} \alpha^i .$$

Index $i|_{i=1}^3$ můžeme chápat současně jako jednotkový multi-index ve směru i, takže např.

$$p^i p^\alpha = p^{\alpha+i} .$$

kde Δt je nějaký relaxační čas[9] a f_0 je rovnovážná rozdělovací funkce daná (v nerelativistickém případě) vztahem (3.69). Obecný moment tohoto srážkového členu má tvar

$$\left(\frac{\delta M^\alpha}{\delta t}\right)_{\mathrm{c}} = -\frac{M^\alpha - M_0^\alpha}{\Delta t} \,, \tag{3.73}$$

takže např. v případě jednosložkového plynu je jeho příspěvek k hustotě a hybnosti (popřípadě i hustotě energie) nulový, protože f_0 jsme volili tak, aby dávalo stejné hodnoty těchto momentů jako f. Vyšší momenty, jako např. složky tenzoru napětí (resp. pouze jeho odchylky od izotropního tlaku) nebo tenzoru Q, pak můžeme odhadnout pomocí rozvoje podle malého parametru Δt z dosazení (3.73) do (3.68)

$$M^\alpha = M_0^\alpha - \Delta t\left(\frac{\partial}{\partial t}M_0^\alpha + \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial x^i}M_0^{\alpha+i} + m\alpha^i\frac{\partial \Phi}{\partial x^i}M_0^{\alpha-i}\right) + o(\Delta t^2) \,, \tag{3.74}$$

a po jejich dosazení do příslušných nižších momentových rovnic dostaneme difúzní aproximaci, přičemž Δt určuje příslušné difúzní koeficienty (viskozitu, tepelnou vodivost aj.).

Všechny momenty M_0^α přitom můžeme explicitně vypočítat dosazením (3.69) do (3.67). Je zřejmé, že ve vlastní soustavě plynu (ve které $v = 0$) budou všechny momenty M_0^α, pro které je alespoň jedna složka α^i lichá, rovny nule, ale nekonečný počet sudých momentů bude nenulový. V obecné (nikoliv vlastní) soustavě pak bude podle binomické formule každý moment lineární kombinací stejného a nižších momentů klidových. Pro praktické výpočty proto může být výhodné[10] přejít od reprezentace f v p-prostoru nikoliv k mocninným momentům (3.67), ale k rozvoji f do vhodné soustavy funkcí ('ket-vektorů') $|\alpha\rangle$

$$|f\rangle = f^\alpha |\alpha\rangle \,. \tag{3.75}$$

Koeficienty rozvoje f^α jsou potom zobecněné momenty, které dostaneme vynásobením f s duálními 'bra-vektory' $f^\alpha = \langle\alpha|f\rangle$ (kde $\langle\alpha|\beta\rangle = \delta^{\alpha\beta}$) a konkrétní tvar momentových rovnic analogických (3.68) pro ně dostaneme dosazením vyjádření operátorů $\hat{p}$ a $\frac{\hat{\partial}}{\partial p}$ v $|\alpha\rangle$-reprezentaci do Boltzmannovy rovnice (3.25) s konkrétním vyjádřením složek Liouvilleova operátoru $\frac{d}{dt}$ jako funkcí p. Například, jestliže lze očekávat, že odchylky od rovnovážného rozdělení (3.69) částic budou malé, pak je výhodné užít tzv. Gradovy metody (viz např. [9]), ve které je reprezentace $|\alpha\rangle$ tvořena Hermiteovými polynomy vynásobenými gaussovskou váhou (3.69) vůči níž jsou ortonormální, takže $\langle\alpha|$ jsou samotné hermiteovské polynomy. Hermiteovské momenty jsou lineárními kombinacemi fyzikálně významných momentů (3.67) a kromě nultého jsou nulové pro (lokálně) rovnovážné rozdělení se správnou rychlostí a teplotou. Proto zpravidla stačí uvažovat prvních 20 momentů (tj. do třetího stupně) nebo 13 momentů (do druhého stupně a toky energie $\sim Q^{ijj}$).

3.1.6 Magnetohydrodynamika

Předpokládejme, že plazma se skládá ze dvou druhů částic s kladným a záporným nábojem $q_\pm$ a hmotami $m_\pm$. Každý z těchto druhů částic je popsán rozdělovací funkcí $f_\pm$, která splňuje Boltzmannovu rovnici

$$\partial_t f_\pm + \dot{x}^i \partial_{x^i} f_\pm + \dot{p}^i \partial_{p^i} f_\pm = \left(\frac{\delta}{\delta t} f_\pm\right) \,, \tag{3.76}$$

[9] Nepřesnost BGK-aproximace spočívá především v předpokladu že k této relaxaci dochází v celém rychlostním prostoru stejnou rychlostí.

[10] Přechod k nové reprezentaci je výhodný tehdy, jestliže tato reprezentace vystihuje (předpokládanou) symetrii řešení konkrétní úlohy, takže stačí nezanedbat menší počet zobecněných momentů. Ze stejných důvodů může být výhodné přejít k diskrétní reprezentaci i ve smíšeném x- a p- řezu fázovým prostorem.

kde rychlost každé částice (srovnej s (3.57))

$$\dot{x}^i = \frac{p^i}{m_\pm} \,, \tag{3.77}$$

a zrychlení je nyní působeno nejen gravitační, ale i elektrostatickou a Lorentzovou silou

$$\dot{p}^i = -m_\pm \nabla^i \Phi + q_\pm E^i + \frac{q_\pm}{c m_\pm} \varepsilon^{ijk} p^j B^k \,. \tag{3.78}$$

Nulté momenty rovnic (3.76) mají tvar[11]

$$\partial_t \rho_\pm + \nabla_i (\pi^i_\pm) = \left(\frac{\delta}{\delta t} \rho_\pm \right) \,, \tag{3.79}$$

a první momenty

$$\partial_t \pi^i_\pm + \nabla_j T^{ij}_\pm + \rho_\pm \nabla^i \Phi - \frac{q_\pm}{m_\pm} \rho_\pm E^i - \frac{q_\pm}{c m_\pm} \varepsilon^{ijk} \pi^j_\pm B^k = \left(\frac{\delta}{\delta t} \pi^i_\pm \right) \,. \tag{3.80}$$

Zavedeme-li celkovou hustotu hmoty $\rho = \rho_+ + \rho_-$ a celkovou rychlost $v = (\pi_+ + \pi_-)/\rho$, pak sečtením rovnic (3.79) pro oba druhy částic dostaneme rovnici kontinuity hmoty

$$\partial_t \rho + \nabla_i (\rho v^i) = \left(\frac{\delta}{\delta t} \rho \right) = 0 \,, \tag{3.81}$$

kde jsme zároveň předpokládali, že v procesech srážek částice žádného druhu nevznikají ani nezanikají a pravé strany rovnic (3.79) proto musí být nulové.[12] Podobně, zavedeme-li celkovou hustotu náboje $\eta = \frac{q_+}{m_+}\rho_+ + \frac{q_-}{m_-}\rho_-$ a proud $J = (\frac{q_+}{m_+}\pi_+ + \frac{q_-}{m_-}\pi_-)$, pak váhovaným součtem rovnic (3.79) dostaneme rovnici kontinuity náboje

$$\partial_t \eta + \nabla_i (J^i) = \left(\frac{\delta}{\delta t} \eta \right) = 0 \,. \tag{3.82}$$

Sečtením rovnic (3.80) dostaneme pohybovou rovnici ve tvaru

$$\partial_t (\rho v^i) + \nabla_j T^{ij} + \rho \nabla^i \Phi - \eta E^i - \frac{1}{c} \varepsilon^{ijk} J^j B^k = \left(\frac{\delta}{\delta t} \pi^i \right) = 0 \,, \tag{3.83}$$

kde vzhledem k zachování hybnosti při srážkách musí součet srážkových členů vymizet. Celkový tenzor napětí můžeme rozložit na část příslušející uspořádanému pohybu $\rho v^i v^j$ a část tlakovou[13] P^{ij}, tj. $T^{ij} \equiv T^{ij}_+ + T^{ij}_- = \rho v^i v^j + P^{ij}$. Předpokládáme-li tlak izotropní (což je ovšem při existenci proudu, tj. nenulových prvních momentů rozdělovacích funkcí, těžko přesně splnitelné) a předpokládáme nulový celkový náboj η, pak po úpravě $\partial_t(\rho v^i) = \rho \frac{d}{dt} v^i - \nabla_j (\rho v^i v^j)$ využívající rovnice kontinuity (3.81) dostáváme pohybovou rovnici ve tvaru

$$\rho \frac{d}{dt} v = -\nabla P - \rho \nabla \Phi + \frac{1}{c} J \times B \,. \tag{3.84}$$

[11] Neboť $\int_p \varepsilon^{ijk} p^j \partial_{p^i} f_\pm = -\int_p \varepsilon^{ijk} \delta^j_i f_\pm = 0$.

[12] V reálném plazmatu může docházet k rekombinaci a ionizaci. Pak je zapotřebí přidat ještě alespoň rovnici pro neutrální částice a nulový bude pouze součet pravých stran.

[13] Tj. napětí vzhledem k vlastnímu klidovému systému plazmatu. Tlak je součtem parciálních tlaků obou druhů částic.

Váhovaným součtem rovnic (3.80) dostaneme pohybovou rovnici pro proud

$$\partial_t J^i + \nabla_j \frac{q_\pm}{m_\pm} T^{ij}_\pm + \eta \nabla^i \Phi - \frac{q^2_\pm}{m^2_\pm} \rho_\pm E^i - \frac{q^2_\pm}{c m^2_\pm} \varepsilon^{ijk} \pi^j_\pm B^k = \left(\frac{\delta}{\delta t} J^i \right) . \tag{3.85}$$

Srážkový člen na pravé straně je zde obecně nenulový, protože obě složky si ve srážkách vyměňují hybnost a tím disipuje proud. Jestliže předpokládáme charakteristický relaxační čas pro ustavení rovnováhy (tj. pro vymizení proudu po vypnutí síly, která jej způsobuje) Δt, pak v BGK aproximaci $\left(\left(\frac{\delta}{\delta t} J\right) = -\frac{J}{\Delta t}\right)$ má tato rovnice tvar

$$J^i = \Delta t \left(-\nabla_j \frac{q_\pm}{m_\pm} T^{ij}_\pm - \eta \nabla^i \Phi + \frac{q^2_\pm}{m^2_\pm} \rho_\pm E^i + \frac{q^2_\pm}{c m^2_\pm} \varepsilon^{ijk} \pi^j_\pm B^k \right) , \tag{3.86}$$

tj. po rozepsání hybností obou složek jako lineárních kombinací v a J

$$J^i = \alpha^i + \varepsilon^{ijk} J^j \beta^k , \tag{3.87}$$

kde

$$\begin{aligned} \alpha^i \;=\; & \Delta t \left(-\nabla_j \eta v^i v^j - \nabla_j \left(\frac{q_+}{m_+} P^{ij}_+ + \frac{q_-}{m_-} P^{ij}_- \right) - \eta \nabla^i \Phi - \frac{q_+ q_-}{m_+ m_-} \rho E^i + \left(\frac{q_+}{m_+} + \frac{q_-}{m_-} \right) \eta E^i \right. \\ & \left. - \frac{q_+ q_-}{c m_+ m_-} \varepsilon^{ijk} \rho v^j B^k \right) , \end{aligned} \tag{3.88}$$

a

$$\beta^k = \frac{\Delta t}{c} \left(\frac{q_+}{m_+} + \frac{q_-}{m_-} \right) B^k . \tag{3.89}$$

Řešení rovnice (3.87) má tvar

$$J^i = \frac{1}{1+\beta^2} \left(\alpha^i + \beta^i \beta_j \alpha^j + \varepsilon^{ijk} \alpha^j \beta^k \right) . \tag{3.90}$$

Jestliže zanedbáme členy od druhého řádu v Δt (což znamená všechny členy s β), v rovnici (3.88) předpokládáme nulovou hustotu náboje a zanedbáme gradienty parciálních tlaků obou složek, pak se tato rovnice redukuje na Ohmův zákon

$$J = \sigma (E + \frac{v}{c} \times B) . \tag{3.91}$$

kde vodivost

$$\sigma = \frac{q_+ q_-}{m_+ m_-} \rho \Delta t . \tag{3.92}$$

Rovnice (3.84) a (3.91) popisují vliv elektromagnetického pole na pohyb plazmatu. Naproti tomu Maxwellovy rovnice

$$\nabla \times B - \frac{1}{c} \partial_t E = \frac{4\pi}{c} J , \tag{3.93}$$

$$\nabla E = 4\pi \eta \simeq 0 , \tag{3.94}$$

$$\nabla \times E + \frac{1}{c} \partial_t B = 0 , \tag{3.95}$$

a

$$\nabla B = 0 , \tag{3.96}$$

popisují vliv zdrojů na pole. V rovnici (3.94) jsme opět zanedbali hustotu náboje. Jestliže v rovnici (3.93) zanedbáme polarizaci vakua proti el. proudu J, pak se zjednoduší na

$$\partial_t E \simeq 0 \Rightarrow J = \frac{c}{4\pi} \nabla \times B \; . \tag{3.97}$$

Dosadíme-li odsud proud do rovnice (3.84), dostaneme pohybovou rovnici pro plazma v zadaném magnetickém poli[14]

$$\rho \frac{d}{dt} v = -\nabla P - \rho \nabla \Phi - \frac{1}{8\pi} \nabla (B.B) + \frac{1}{4\pi} (B.\nabla) B \; . \tag{3.98}$$

Naproti tomu vývoj magnetického pole je dán rovnicí (3.95), kde můžeme z Ohmova zákona (3.91) vyloučit E a z (3.97) opět i J, takže dostaneme pohybovou rovnici pro B

$$\partial_t B = -c \nabla \times E = \nabla \times (-\frac{c}{\sigma} J + v \times B) = -\nabla \times (\frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla \times B) + \nabla \times (v \times B) \; . \tag{3.99}$$

Můžeme ji dále přepsat do lagrangeovských souřadnic

$$\frac{d}{dt} B = \partial_t B + (v.\nabla) B = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 B + (B.\nabla) v - B(\nabla.v) \; . \tag{3.100}$$

První člen na pravé straně popisuje difúzi magnetického pole, zatímco druhé dva členy jeho zamrznutí do plazmatu.

[14] Přitom jsme užili relace

$$((a \times b) \times c)_i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} a_l b_m c_k = (\delta_{kl} \delta_{im} - \delta_{il} \delta_{km}) a_l b_m c_k = (ac) b_i - (bc) a_i \; .$$